SOBRE A TEORIA DOS ESPAÇOS $\mathcal{L}^{p,\lambda}$

JOÃO BATISTA GARCIA

Orientador:
Prof. Dr. Benjamin Bordin

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/1982

À Bete, Daniele e Simone.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo sacrifício dispendido para a minha educação.

À minha esposa pela compreensão e apoio durante todas as etapas do curso de mestrado.

Ao Professor Benjamin Bordin pela proposta deste tema e principalmente pela paciente e segura orientação.

Aos colegas do IMECC que de alguma maneira colaboraram para a realização deste trabalho, em particular ao Waldir Quandt.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar os espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, considerados por, dentre outros, Campanato [3], Stampacchia [15], Peetre [12].

A importância destes espaços está ligada ao fato de que eles englobam certos espaços clássicos de funções, tais como os espaços L^p, os espaços de Morrey $L^{p,\lambda}$, os espaços BMO, introduzidos por John-Nirenberg em [8] e os espaços das funções hölderianas $\mathrm{Lip}(\alpha)$, que são de grande utilidade dentro da teoria das equações parciais elípticas e parabólicas.

No Capítulo I apresentaremos definições e resultados básicos que utilizaremos no desenrolar do trabalho. Omitimos as demonstrações, visto que elas podem ser encontradas nas referências citadas.

No Capítulo II daremos a definição de $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ e estudaremos propriedades deste espaço. Ainda neste Capítulo estudaremos uma generalização de $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, que será denotada por $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}$, a fim de nos auxiliar na demonstração de que, para $0 \leq \lambda < n$ ($n = \dim \mathbb{R}^n$), temos $L^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{p,\lambda}$. Estudaremos também no Capítulo II o comportamento das funções de $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, como funções hölderianas de expoente $\alpha = \dfrac{\lambda-n}{p}$.

Cabe salientar que além da generalização $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}$, existem outras generalizações estudadas, por exemplo, por Spanne [14], Stampacchia [16], Barozzi [1] e Da Prato [6].

No Capítulo III apresentaremos teoremas de interpolação envolvendo os espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Para tanto introduziremos inicialmente os espaços BMO e os espaços $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}$. Os espaços $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}$ desempenharão, nos teoremas de interpolação envolvendo os espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, o mesmo papel que os espaços de Marcinkiewcz L_*^p desempenham nos teoremas de interpolação envolvendo os espaços L^p. Ainda neste Capítulo daremos uma aplicação destes teoremas, onde o operador linear utilizado é o Potencial de Riesz. Nesta aplicação obtém-se dois resultados, um dos quais é consequência do teorema (9.1) de [18], mas o outro é um novo complemento do primeiro, e cuja demonstração talvez não fosse tão simples sem o auxílio da teoria dos espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

Esperamos que este trabalho possa contribuir para um estudo mais aprofundado dos espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ numa versão multiparamétrica em λ.

CAPÍTULO I

NOÇÕES PRELIMINARES

§1. NOÇÕES GERAIS SOBRE $\mathbb{R}^n$

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{R}^n$ o espaço vetorial consistindo de todas as n-uplas de números reais $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Consideraremos $\mathbb{R}^n$ munido com a norma eu- $|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$.

Dado um subconjunto E de $\mathbb{R}^n$, denotaremos o fecho de E por $\bar{E}$ e por $d(E)$ o diâmetro de E. Usaremos também a notação $\mathbb{R}^n \setminus E$ ou E^c para indicar o complementar de E em $\mathbb{R}^n$.

Indicaremos por $|E|$, a medida de Lebesgue do conjunto mensurável $E \subset \mathbb{R}^n$ e usaremos a notação $\int_E f(x)\,dx$ para indicar a integral de Lebesgue da função f sobre o conjunto E.

Diremos que uma propriedade P, de pontos de um conjunto mensurável E, vale em quase toda parte (q.t.p.) ou para quase todo x pertencente a E (p.q.t. $x \in E$) se os pontos de E para os quais P é falsa estiverem contidos num conjunto de medida nula.

Se E é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ denotaremos por χ_E a função característica de E em relação a $\mathbb{R}^n$, que vale 1 em E e 0 em E^c.

Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Chama-se suporte de uma função f definida em E, ao menor conjunto fechado (relativamente a E) que contém o conjunto de todos os pontos $x \in E$ tal que $f(x) \neq 0$.

§2. ESPAÇOS NORMADOS E ESPAÇOS L^p ([2], [5], [7])

Definição 1.2.1: Diremos que um espaço vetorial real E é um espaço vetorial semi-normado se a aplicação $\|.\| : E \to \mathbb{R}$ satisfaz

(i) $\|a x\| = |a| \; \|x\|$

(ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para todo $x,y \in E$ e para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.2: O espaço vetorial E será chamado espaço vetorial quase-normado se

(i) $\|x\| = 0$ implicar $x = 0$

(ii) $\|ax\| = |a| \; \|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq k(\|x\| + \|y\|)$, $k > 1$,

para todo $x,y \in E$ e para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.3: Se $\|.\|$ satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da definição 1.2.2 com $k = 1$, então o espaço vetorial E será chamado um espaço vetorial normado e $\|.\|$ será chamada norma em E.

Num espaço normado a função $d(x,y) = \|x-y\|$ é uma métrica, e consideraremos sempre o espaço normado munido desta métrica e da topologia a ela associada. Assim todo espaço normado é um espaço métrico.

Um espaço métrico M é completo quando toda sequência de Cauchy em M converge para um ponto de M.

Definição 1.2.4: Um espaço vetorial normado e completo chama-se espaço de Banach.

Definição 1.2.5: Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Uma aplicação T de E em F diz-se um operador linear se $T(ax+y) = a\,T(x) + T(y)$ para todo $x,y \in E$ e para todo $a \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.6: Sejam E, F espaços vetoriais normados e T um operador linear de E em F. Diremos que T é limitado se existe constante $c > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ para todo $x \in E$. Neste caso definimos a norma de T como sendo o ínfimo dos c que satisfazem a desigualdade $\|T(x)\| \leq c\|x\|$, e nós escreveremos $\|T\|$ para a norma de T.

Teorema 1.2.1: Sejam E e F espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{R}$ e seja T um operador linear limitado de E em F. Então

$$\|T\| = \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E , \; x \neq 0 \right\}$$

$$\sup \{ \|T(x)\| : x \in E , \; \|x\| = 1 \}$$

$$\sup \{ \|T(x)\| : x \in E , \; \|x\| \leq 1 \}$$

e $\|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\|$ para todo $x \in E$.

Teorema 1.2.2: Sejam E e F espaços vetoriais normados e T um operador linear de E em F. Então as seguintes condições são equivalentes

(i) T é limitado.

(ii) T é uniformemente contínuo em E.

(iii) T é contínuo em algum ponto de E.

Definição 1.2.7: Chamaremos de $L^p(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p < \infty$ ao conjunto das dunções mensuráveis cuja potência p é Lebesgue integral, ou seja, é o conjunto das funções mensuráveis tais que

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty .$$

A aplicação $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ definida por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma em $L^p(\Omega)$ quando identificamos funções que são - iguais em quase toda parte. O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é um espaço de Banach.

Teorema 1.2.3: (Desigualdade de Hölder). Seja $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^{p'}(\Omega)$, com $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)} .$$

Teorema 1.2.4: (Desigualdade de Minkowski). Para $1 \leq p < \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$ temos que

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} .$$

Definição 1.2.8: Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um funcional linear em E é um operador linear de E em $\mathbb{R}$. Se E é um espaço vetorial normado, denotaremos por E^* o espaço de todos os funcionais lineares limitados em E. O espaço E^* é chamado o espaço dual de E.

Teorema 1.2.5: $L^{p'}(\Omega)$ e $(L^p(\Omega))^*$ são isomorfos se $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Observação: De acordo com o teorema 1.2.5 podemos pensar no dual $L^p(\Omega)$ como sendo o espaço $L^{p'}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Assim sendo temos que o dual do espaço $L^2(\Omega)$ é o próprio $L^2(\Omega)$.

Definição 1.2.9: Um espaço vetorial normado E é dito ser uniformemente convexo se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$, então $\|\frac{x+y}{2}\| \leq (1-\delta)$ sempre que $x,y \in E$.

Teorema 1.2.6: O espaço $L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, é uniformemente convexo.

Definição 1.2.10: Seja $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções pertencentes a $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Se $p > 1$ diremos que $\{f_n\}$ converge fracamente em $L^p(\Omega)$ para uma função $f \in L^p(\Omega)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega fn\, g\, dx = \int_\Omega fg\, dx ,$$

para cada $g \quad L^{p'}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Se $p = 1$, então $\{fn\}$ é dita convergir para f em $L^p(\Omega)$ se

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega fn\ g\ dx = \int_\Omega fg\ dx \quad ,$$

para toda função g limitada em Ω.

<u>Teorema 1.2.7</u>: (Riesz-Thorin) Consideremos $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ e vamos supor que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \to L^{p_0}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_0 \quad ,$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \to L^{p_1}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_1 \quad .$$

Então

$$T : L^{q}(\Omega) \to L^{p}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_0^{1-\theta}\ M_1^{\theta}$$

sempre que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ e $0 < \theta < 1$.

<u>Teorema 1.2.8</u>: (Marcinkiewicz) Consideremos $q_0 \neq q_1$ e vamos supor que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \to L_*^{p_0} \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_0^*$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \to L_*^{p_1}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_1^* \quad .$$

Então

$$T : L^{q}(\Omega) \to L^{p}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq c_\theta\ {M_0^*}^{1-\theta}\ {M_1^*}^{\theta}$$

sempre que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ e $0 < \theta < 1$.

CAPÍTULO II

OS ESPAÇOS $\mathcal{L}^{p,\lambda}$

Neste capítulo daremos a definição dos espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, e estudaremos propriedades deste espaço. A sua importância se deve ao fato de que para valores particulares de λ, temos espaços que desempenham importante papel dentro da análise.

§1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Seja Ω um subconjunto aberto do espaço euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. Com $d(\Omega)$ denotaremos o diâmetro de Ω e com $S(x_0,\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x-x_0| \leq \rho\}$ a esfera n-dimensional fechada com centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $\rho > 0$. Colocaremos também $\Omega(x_0,\rho) = \Omega \cap S(x_0,\rho)$.

<u>Definição 2.1.1</u>: Seja u uma função mensurável real definida em Ω. Diremos que u pertence a $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda \leq n+p$, se para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo número $\rho \in (0, d(\Omega)]$ existe constante positiva $M = M(u)$ tal que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p \, dx \leq M \rho^{\lambda} .$$

<u>Definição 2.1.2</u>: Seja $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Definimos

$$|||u|||_{p,\lambda} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p dx \right]^{1/p}$$

<u>Lema 2.1.1</u>: $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ é um espaço vetorial real e $|||\cdot|||_{p,\lambda}$ é uma semi-norma em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Mostremos inicialmente que $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ é um espaço vetorial real. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ quaisquer. Assim para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |au(x)-c|^p dx = \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |a|^p \, |u(x) - \frac{c}{a}|^p \, dx$$

$$= \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} |a|^p \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p \, dx$$

$$= |a|^p \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p \, dx \, .$$

Desta forma, teremos pela definição 2.1.1 que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$, existe $M > 0$ tal que

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |au(x)-c|^p dx \leq |a|^p M \rho^{-\lambda} = M' \rho^{-\lambda}$$

onde $M' = |a|^p M$, ou seja, $au \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Sejam u e v pertencentes a $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$(1) \quad \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |(u+v)(x)-c|^p dx = \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-\frac{c}{2}+v(x)-\frac{c}{2}|^p \, dx \, .$$

Mas,

$$(2) \qquad |u(x) - \tfrac{c}{2} + v(x) - \tfrac{c}{2}|^p \le 2^p(|u(x) - \tfrac{c}{2}|^p + |v(x) - \tfrac{c}{2}|^p) \ ,$$

Então de (1) e (2) segue que

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |(u+v)(x)-c|^p dx \le 2^p \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} (|u(x)-\tfrac{c}{2}|^p + |v(x)-\tfrac{c}{2}|^p)dx$$

$$= 2^p \inf_{c\in\mathbb{R}} \Big(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-\tfrac{c}{2}|^p \, dx \ +$$

$$+ \inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |v(x) - \tfrac{c}{2}|^p \, dx \Big) \ .$$

Assim temos da definição 2.1.1 que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ existem constantes positivas M_1 e M_2 tais que

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |(u+v)(x)-c|^p dx \le 2^p \ (M_1\rho^\lambda + M_2\rho^\lambda) = M\rho^\lambda \ ,$$

onde $M = 2^p(M_1+M_2)$, isto é, $u+v \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Fica então demonstrado que $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ é um espaço vetorial real.

Mostraremos a seguir que $|||\cdot|||_{p,\lambda}$ é uma semi-norma em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Verificaremos primeiro que se $u,v \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ então $|||u+v|||_{p,\lambda} \le |||u|||_{p,\lambda} + |||v|||_{p,\lambda}$. Da definição 2.1.2 temos que

$$(3) \quad |||u|||_{p,\lambda} + |||v|||_{p,\lambda} = \sup_{\substack{x_0\in\bar{\Omega} \\ 0<\rho\le d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c_1\in\mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p dx\right]^{1/p} +$$

$$+ \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |v(x)-c_2|^p dx \right]^{1/p} .$$

Pela propriedade do supremo temos que o segundo termo da igualdade (3) majora a expressão

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\left(\rho^{-\lambda} \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p dx\right)^{1/p} + \left(\rho^{-\lambda} \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |v(x)-c_2|^p dx\right)^{1/p} \right]$$

donde, colocando $\rho^{-\frac{\lambda}{p}}$ em evidência, vem que

$$|||u|||_{p,\lambda} + |||v|||_{p,\lambda} \geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left\{ \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \left[\inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p dx \right)^{1/p} + \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |v(x)-c_2|^p dx \right)^{1/p} \right] \right\}$$

e daí pela propriedade do ínfimo temos que

$$|||u|||_{p,\lambda} + |||v|||_{p,\lambda} \geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left\{ \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \left(\|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \right) \right\} .$$

Mostraremos a seguir que

(4) $$\inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \left(\|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \right) \geq$$

$$\geq \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} .$$

Para isso consideremos os seguintes conjuntos

$$A = \{\|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} : c_1 \in \mathbb{R}\} ,$$

$$B = \{\|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} : c_2 \in \mathbb{R}\} ,$$

$$C = \{\|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\} .$$

Seja $k = \|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \in C$. Então existe $k_A \in A$ e $k_B \in B$ tal que $k_A + k_B = \|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho)} + \|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho)} \in A+B$ satisfazendo $k_A+k_B \geq k$.

Analogamente, se

$$k_A+k_B = \|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \in A+B ,$$

existe $k = \|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \in C$ tal que $k_A+k_B \geq k$. Fica assim demonstrado (4) e daí

$$(5) \qquad |||u|||_{p,\lambda} + |||v|||_{p,\lambda} \geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u+v-c\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$= |||u+v|||_{p,\lambda} .$$

Para concluirmos a demonstração do lema, mostraremos que $|||au|||_{p,\lambda} = |a| \; |||u|||_{p,\lambda}$. Sejam $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ qualquer e $a \in \mathbb{R}$. Se $a = 0$ nada há a demonstrar. Suponhamos então $a \neq 0$. Logo da definição 2.1.2 e propriedades do ínfimo e supremo temos que

$$|||au|||_{p,\lambda} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar\Omega \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |au(x)-c|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \sup_{\substack{x_0 \in \bar\Omega \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |a|^p \, |u(x)-\frac{c}{a}|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \sup_{\substack{x_0 \in \bar\Omega \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \, |a|^p \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= |a| \sup_{\substack{x_0 \in \bar\Omega \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p dx\right]^{1/p} .$$

Portanto,

$$(6) \qquad |||au|||_{p,\lambda} = |a| \; |||u|||_{p,\lambda} .$$

Por (5) e (6) fica provado o lema.

<u>Observação 1</u>: $|||\cdot|||_{p,\lambda}$ não é uma norma, pois se u é uma constante diferente de zero, segue que $|||u|||_{p,\lambda} = 0$.

A fim de normalizarmos $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ passaremos à seguinte

<u>Definição 2.1.3</u>: Seja $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Definimos

$$\|u\|_{p,\lambda} = |||u|||_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)} .$$

<u>Lema 2.1.2</u>: $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ é uma norma em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demonstração: Sejam $u,v \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ quaisquer. Temos que

$$\|u+v\|_{p,\lambda} = |||u+v|||_{p,\lambda} + \|u+v\|_{L^p(\Omega)} .$$

Mas pelo lema 2.1.1 e levando em conta que $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma obtemos

(6) $$\|u+v\|_{p,\lambda} \leq |||u|||_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)} + |||v|||_{p,\lambda} + \|v\|_{L^p(\Omega)}$$
$$= \|u\|_{p,\lambda} + \|v\|_{p,\lambda} .$$

Sejam $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $a \in \mathbb{R}$. Pelo lema 2.1.1 temos

(7) $$\|au\|_{p,\lambda} = |||au|||_{p,\lambda} + \|au\|_{L^p(\Omega)} = |a|\ |||u|||_{p,\lambda} + |a|\ \|u\|_{L^p(\Omega)}$$
$$= |a|\ (|||u|||_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) = |a|\ \|u\|_{p,\lambda} .$$

Provemos agora que se $\|u\|_{p,\lambda} = 0$ então $u = 0$. De $\|u\|_{p,\lambda} = 0$ vem que $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, donde $u = 0$. Disto e de (6) e (7) fica demonstrado que $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ é uma norma em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Vamos demonstrar a seguir que $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ é um espaço completo. Para isto vamos utilizar uma definição de $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ que é equivalente à definição 2.1.1.

<u>Definição 2.1.4</u>: Seja u uma função mensurável real definida em Ω. Diremos que u pertence a $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, com $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda \leq n+p$, se para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo número $\rho \in (0,d(\Omega)]$, existe constante positiva $M = M(u)$ tal que

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p \, dx \leq M\rho^{\lambda}$$

onde $m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) = \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|} \int_{\Omega(x_0,\rho)} u(x)\, dx$ é o valor médio da função u em $\Omega(x_0,\rho)$.

<u>Lema 2.1.3</u>: As definições 2.1.1 e 2.1.4 são equivalentes.

<u>Demonstração</u>: Observemos primeiramente que

$$(8) \qquad m_{\Omega(x_0,\rho)}(u+av) = m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) + am_{\Omega(x_0,\rho)}(v) \; .$$

e

$$(9) \qquad \|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

De fato,

$$m_{\Omega(x_0,\rho)}(u+av) = \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|} \int_{\Omega(x_0,\rho)} (u+av)(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|} \int_{\Omega(x_0,\rho)} u(x) + a \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|} \int_{\Omega(x_0,\rho)} v(x)\, dx$$

$$= m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) + a\, m_{\Omega(x_0,\rho)}(v) \quad ,$$

o que prova (8) .

Temos que

$$|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| \leq \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|\, dx$$

Pela desigualdade de Hölder segue que

$$|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| \le \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|} \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} dx\right)^{1/q} \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

onde p e q são tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Assim

$$(10) \quad |m_{\Omega(x_0\rho)}(u)| \le \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|} |\Omega(x_0,\rho)|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$= |\Omega(x_0,\rho)^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

Portanto, de (10) obtemos

$$\|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} \left| |\Omega(x_0,\rho)|^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \right|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \left(|\Omega(x_0,\rho)|^{-1} \|u\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \int_{\Omega(x_0,\rho)} dx\right)^{1/p}$$

$$= |\Omega(x_0,\rho)|^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} |\Omega(x_0,\rho)|^{1/p}$$

$$= \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} ,$$

o que demonstra (9).

Observemos também que, se $c \in \mathbb{R}$ então $m_{\Omega(x_0,\rho)}(c)=c$. Com efeito,

$$m_{\Omega(x_0,\rho)}(c) = \frac{1}{|\Omega(x_0,\rho)|}\int_{\Omega(x_0,\rho)} c\, dx = \frac{c}{|\Omega(x_0,\rho)|}\int_{\Omega(x_0,\rho)} dx$$

$$= \frac{c}{|\Omega(x_0,\rho)|}\cdot|\Omega(x_0,\rho)| = c\ .$$

Temos ainda que, para toda constante $c \in \mathbb{R}$

(11) $\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq$

$$\leq \|u-c\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)-c\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$= \|u-c\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(c)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$= \|u-c\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho)} + \|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u-c)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}\ .$$

De (9) e (11), segue que

(12) $$\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq 2\,\|u-c\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}\ ,$$

para toda $c \in \mathbb{R}$.

Logo, tomando o ínfimo em ambos os membros de (12) decorre que

(13) $$\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq 2 \inf_{c\in\mathbb{R}} \|u-c\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

Desta forma, se u satisfaz a definição 2.1.1, existe constante $M > 0$, tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p dx \leq 2^p \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p\, dx$$

$$\leq 2^p M \rho^\lambda = M' \rho^\lambda$$

onde $M' = 2^p M$. Isto nos mostra que u satisfaz a definição 2.1.4.

Por outro lado, se u satisfaz a definição 2.1.4, existe constante $M > 0$ tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ segue que

$$(14) \qquad \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p dx \leq \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p\, dx$$

$$\leq M \rho^\lambda$$

ou seja, u também satisfaz a definição 2.1.1. Logo, as duas definições são equivalentes.

cqd

<u>Definição 2.1.5</u>: Seja $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Definimos

$$|||u|||^{\sim}_{p,\lambda} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p dx\right]^{1/p}$$

e

$$\|u\|^{\sim}_{p,\lambda} = |||u|||^{\sim}_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

<u>Lema 2.1.4</u>: $\|\cdot\|^{\sim}_{p,\lambda}$ é uma norma em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ equivalente à norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$.

<u>Demonstração</u>: A demonstração de que $\|\cdot\|^{\sim}_{p,\lambda}$ é uma norma, se faz de forma análoga à demonstração de que $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ é nor

ma.

Mostraremos a seguir a equivalência das duas normas. De (13) segue que

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p dx\right]^{1/p}$$

$$\leq 2 \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p \, dx\right]^{1/p}$$

e de (14) obtemos que

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p \, dx\right]^{1/p}$$

$$\leq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p \, dx\right]^{1/p} .$$

Logo,

$$|||u|||_{p,\lambda} \leq \widetilde{|||u|||}_{p,\lambda} \leq 2 \, |||u|||_{p,\lambda} .$$

Mas

$$\widetilde{\|u\|}_{p,\lambda} = \widetilde{|||u|||}_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq 2 \, |||u|||_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq 2(|||u|||_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) = 2\|u\|_{p,\lambda} ,$$

donde

$$\|u\|_{p,\lambda} \leq \widetilde{\|u\|}_{p,\lambda} \leq 2\|u\|_{p,\lambda} .$$

cqd

Lema 2.1.5: Seja $\{w_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ e suponhamos que $\{w_n\}$ converge a zero na norma $L^p(\Omega)$, então $\{w_n\}$ converge a zero na norma $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demonstração: Basta demonstrarmos que $|||w_n|||^{\sim}_{p,\lambda} \to 0$. Como $\{w_n\}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m,n > n_\varepsilon$ temos

$$(15) \qquad (|||w_n - w_m|||_{p,\lambda})^p < \varepsilon .$$

Como $\{w_n\}$ converge a zero na norma $L^p(\Omega)$, de (9) segue que $\{m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)\}$ converge a zero na norma $L^p(\Omega)$, donde $\{w_n - m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)\}$ converge a zero na norma $L^p(\Omega)$. Então para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0, d(\Omega)]$, a sequência $\{w_n - m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)\}$ converge a zero na norma $L^p(\Omega(x_0,\rho))$. Assim para ρ fixo com $0 < \rho \le d(\Omega)$ temos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon(\rho)$ tal que para todo $m > n_\varepsilon(\rho)$ e todo $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$(16) \qquad \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_m - m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_m)|^p \, dx < \varepsilon \, \rho^\lambda$$

Por outro lado temos que

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_n - m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)|^p \, dx =$$

$$= \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_n - w_m + w_m - m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_m) + m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_m) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)|^p \, dx$$

donde

$$(17) \qquad \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_n - m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)|^p \, dx \le$$

$$\leq \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} 2^p (|w_n-w_m-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n-w_m)|^p+|w_m-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_m)|^p)\, dx$$

$$= 2^p \rho^{-\lambda} (\int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_n-w_m-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n-w_m)|^p dx + \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_m-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_m)|^p dx$$

$$\leq 2^p \left[(|||w_n-w_m|||^{\sim}_{p,\lambda})^p + \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_m-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_m)|^p\, dx \right.$$

De (15), (16) e (17) dado $\varepsilon > 0$, existe $N=\max\{n_\varepsilon, n_\varepsilon(\rho)\}$ tal que para todo $n > n_\varepsilon$ e $m > N$ temos que

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_n-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)|^p dx < 2^p (\varepsilon+\varepsilon) = 2^{p+1} \varepsilon$$

Com isto temos que dado $\varepsilon > 0$ e ρ fixo com $0<\rho\leq d(\Omega)$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_\varepsilon$ e para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ segue que

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_n-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)|^p\, dx < \varepsilon .$$

Então, pela arbitrariedade de ρ temos que

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |w_n-m_{\Omega(x_0,\rho)}(w_n)|^p\, dx < \varepsilon ,$$

para todo $n > n_\varepsilon$, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo ρ $(0,d(\Omega)]$.

Portanto dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_\varepsilon$ resulta que $|||w_n|||^{\sim}_{p,\lambda} < \varepsilon$, isto é, $\{w_n\}$ converge a zero na norma $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

cqd.

<u>Teorema 2.1.1</u>: $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ munido da norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ é um

espaço de Banach.

Demonstração: Como $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ e $\widetilde{\|\cdot\|}_{p,\lambda}$ são equivalentes, basta mostrarmos que $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando munido com a norma $\widetilde{\|\cdot\|}_{p,\lambda}$.

Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m,n > n_\varepsilon$ temos que

$$\widetilde{\|u_n-u_m\|}_{p,\lambda} = |||u_n-u_m|||_{p,\lambda} + \|u_n-u_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon .$$

Logo $\|u_n-u_m\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$ para todo $m,n > n_\varepsilon$, ou seja, $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$. Agora como $L^p(\Omega)$ é completo, existe uma função $u \in L^p(\Omega)$ tal que $\{u_n\}$ converge para u na norma $L^p(\Omega)$, assim $\{u_n-u\}$ converge a zero na norma $L^p(\Omega)$.

Observemos que $\{m_{\Omega(x_0,\rho)}(u_n)\}$ converge para $m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)$ na norma $L^p(\Omega(x_0,\rho))$. De fato, como $\{u_n\}$ converge na norma $L^p(\Omega)$ para a função u, então $\{u_n\}$ converge na norma $L^p(\Omega(x_0,\rho))$ para a função u, para cada $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para cada $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Daí, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$

$$\|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u_n)-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$= \|m_{\Omega(x_0,\rho)}(u_n-u_n)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq \|u_n-u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} < \varepsilon .$$

Então temos que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$, $\{u_n-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u_n)\}$ converge na norma $L^p(\Omega(x_0,\rho))$

para a função $u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)$.

Como $\{u_n\}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ segue que $\{u_n\}$ é limitada em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, isto é, existe uma constante positiva M tal que $(\|u_n\|^{\sim}_{p,\lambda})^p \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então para cada $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para cada $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$(18) \quad \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u_n-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u_n)|^p dx \leq (|||u_n|||^{\sim}_{p,\lambda})^p \leq (\|u_n\|^{\sim}_{p,\lambda})^p \leq M$$

Fazendo $n \to \infty$ em (18) vem que

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-m_{\Omega(x_0,\rho)}|^p \, dx \leq M \rho^{\lambda} ,$$

para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$, isto é , $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Falta somente verificar que $\{u_n\}$ converge na norma $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ para a função u .

Já foi visto que $\{u_n-u\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, que converge a zero na norma $L^p(\Omega)$, então fazendo $w_n = u_n-u$ no lema 2.1.5 segue que $\{u_n-u\}$ converge a zero na norma $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ ou seja $\{u_n\}$ converge na norma $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ para a função u. Fica assim demonstrado o teorema.

<u>Proposição 2.1.1</u>: $\mathcal{L}^{p,0}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Primeiramente verificaremos a inclusão $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ para $0\leq\lambda\leq n+p$. Seja então $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, assim existe constante $M > 0$ tal que, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p dx \leq M\, \rho^\lambda ,$$

isto é,

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p dx < \infty .$$

Então, existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c_1|^p \, dx < \infty .$$

Em particular, se x_0 pertence à fronteira de Ω e $\rho = d(\Omega)$ temos que $\Omega(x_0,\rho) = \Omega$ e então

$$\int_{\Omega} |u(x)-c_1|^p \, dx < \infty ,$$

ou seja, $u \in L^p(\Omega)$ o que prova que $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Provemos agora que $L^p(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,0}(\Omega)$. Seja $u \in L^p(\Omega)$. Então existe constante $M > 0$ tal que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \leq M .$$

Como $\Omega(x_0,\rho) \subset \Omega$ para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$, temos que

$$\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq M .$$

Por outro lado, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ segue que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p \, dx \le \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p \, dx \le M \, .$$

Portanto, $u \in \mathcal{L}^{p,0}(\Omega)$, ou seja $L^p(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,0}(\Omega)$, donde se conclui que $\mathcal{L}^{p,0}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

cqd.

§2. OS ESPAÇOS $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ COMO ESPAÇOS DE MORREY

Neste item vamos inicialmente estudar os espaços de Morrey, que denotaremos por $L^{p,\lambda}(\Omega)$. A seguir vamos estudar uma generalização dos espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, que tecnicamente será útil na demonstração de que para $0 \le \lambda < n$ temos $L^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

<u>Definição 2.2.1</u>: Seja u uma função mensurável real definida em Ω . Diremos que $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ com $1 \le p < \infty$ e $0 \le \lambda < n$ se

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \le d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p \, dx \right]^{1/p} < \infty \, .$$

<u>Definição 2.2.2</u>: Seja $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$. Definimos

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \le d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

<u>Lema 2.2.1</u>: $\|\cdot\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$ é uma norma em $L^{p,\lambda}(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que $\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = 0$, ou seja

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p \, dx\right]^{1/p} = 0 \quad .$$

Mas, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$

$$\left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx\right]^{1/p} \leq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx\right]^{1/p} \quad ,$$

donde, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = 0 \quad .$$

Em particular, para x_0 pertencente à fronteira de Ω e $\rho = d(\Omega)$ segue que $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$, e daí $u = 0$ em Ω .

Agora, para cada u e $v \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ temos

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} + \|v\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} =$$

$$= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx\right]^{1/p} + \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |v(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

$$\geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[(\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx)^{1/p} + (\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |v(x)|^p dx)^{1/p}\right]$$

$$= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda/p} (\|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|v\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))})\right.$$

$$\geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \rho^{-\lambda/p} \|u+v\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \|u+v\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \quad .$$

Finalmente, para todo $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ e $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$\|au\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |au(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} |a| \left[\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx\right]^{1/p}$$

$$= |a| \; \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .$$

cqd.

Teorema 2.2.1: $L^{p,\lambda}(\Omega)$ munido com a norma $\|\cdot\|_{P^{p,\lambda}(\Omega)}$ é um espaço de Banach.

Demonstração: Primeiramente notemos que

(19) $$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d(\Omega)^{\lambda/p} \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .$$

De fato, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \rho^{\lambda/p} \rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$\leq d(\Omega)^{\lambda/p} \rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$\leq d(\Omega)^{\lambda/p} \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$= d(\Omega)^{\lambda/p} \| \; \|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .$$

Em particular para x_0 pertencente à fronteira de Ω e $\rho = d(\Omega)$ segue que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d(\Omega)^{\lambda/p} \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .$$

Seja $\{u_n\}$ uma sequência de Cauchy em $L^{p,\lambda}(\Omega)$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m,n > n_\varepsilon$ temos

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \varepsilon\, d(\Omega)^{-\lambda/p} ,$$

donde, por (14)

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} < d(\Omega)^{\lambda/p}\, \varepsilon\, d(\Omega)^{-\lambda/p} = \varepsilon .$$

Isto nos mostra que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\Omega)$, portanto existe $u \in L^p(\Omega)$, para a qual $\{u_n\}$ converge na norma $L^p(\Omega)$.

Verifiquemos que $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$. Com efeito, como - $\{u_n\}$ converge na norma $L^p(\Omega)$ para u, segue que $\{u_n\}$ converge na norma $L^p(\Omega(x_0,\rho))$ para u, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Assim, para ρ fixo com $0 < \rho \leq d(\Omega)$ temos que existe $n_\rho \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_\rho$ e para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ ocorre

$$(20) \qquad \|u - u_n\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} < \rho^{\lambda/p} .$$

Por outro lado, $\{u_n\}$ sendo de Cauchy em $L^{p,\lambda}(\Omega)$, é limitada em $L^{p,\lambda}(\Omega)$, isto é, existe constante $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

(21) $$\|u_n\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq M \quad .$$

Levando em conta que

$$\rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u-u_n\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u_n\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$\leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u-u_n\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \sup_{\substack{x_0\in\bar\Omega \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u_n\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$= \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u-u_n\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|u_n\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$$

por (20) e (21), temos que para todo $n > n_\rho$ e para todo $x_0 \in \bar\Omega$

$$\rho^{-\lambda/p}\|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} < 1+M = M' \quad .$$

Então pela arbitrariedade de ρ, temos que para todo $x_0 \in \bar\Omega$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$

(22) $$\rho^{-\lambda/p}\|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq M' \quad .$$

Logo, tomando o supremo em $x_0 \in \bar\Omega$ e $\rho \in (0,d(\Omega)]$, em ambos os membros de (22) vem que $\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq M'$, o que demonstra que $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$.

Resta somente mostrar que $\{u_n\}$ converge na norma $L^{p,\lambda}(\Omega)$ para a função u .

Seja ρ fixo com $0<\rho\leq d(\Omega)$. Como $\{u_n\}$ é de Cauchy em $L^{p,\lambda}(\Omega)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m,n > n_\varepsilon$ temos

(23) $$\|u_n - u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2} ,$$

e como $\{u_n\}$ converge para u na norma $L^p(\Omega(x_0,\rho))$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon(\rho)$ tal que para todo $m > n_\varepsilon(\rho)$ e para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$

(24) $$\|u_m - u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} < \frac{\varepsilon}{2} \rho^{\lambda/p}$$

De (23) e (24) se escolhermos $N = \text{máx}\{n_\varepsilon, n_\varepsilon(\rho)\}$ temos que para o ρ escolhido e para todo $n > n_\varepsilon$, $m > N$

$$\rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u_n-u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u_n-u_m\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u_m-u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$\leq \|u_n-u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}}\|u_m-u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \frac{\varepsilon}{2} \rho^{\lambda/p} = \varepsilon .$$

Assim, pela arbitrariedade de ρ, concluímos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_\varepsilon$, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\rho^{-\lambda/p}\|u_n-u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} < \varepsilon ,$$

logo

$$\|u_n-u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \varepsilon .$$

Com isto fica demonstrado o teorema.

<u>Proposição 2.2.1</u>: $L^{p,0}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Demonstração: De (19) temos que,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d(\Omega)^{\lambda/p}\|u\|_{P^{p,\lambda}(\Omega)} .$$

Então, se $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ temos que o membro direito da desigualdade acima é finito e então $u \in L^p(\Omega)$, isto é, $L^{p,\lambda}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. Em particular, para $\lambda = 0$ temos $L^{p,0}(\Omega) \subset$ $\subset L^p(\Omega)$.

Seja agora $u \in L^p(\Omega)$. Então $\|u\|^p_{L^p(\Omega)} < \infty$. Mas como para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos

$$\|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} ,$$

e portanto

$$\|u\|_{L^{p,0}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty ,$$

ou seja, $u \in L^{p,0}(\Omega)$, o que demonstra a proposição.

Vamos a seguir dar uma generalização dos espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Indicaremos por $P(x)$ um polinômio genérico em x, com coeficientes reais. Com $\mathcal{P}_k$, k inteiro não-negativo denotaremos a classe de todos os polinômios $P(x)$ com grau menor ou igual a k.

Definição 2.2.3: Seja u uma função mensurável real definida em Ω. Diremos que u pertence a $\mathcal{L}^{p,\lambda}_k(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$, $0 \leq \lambda \leq n+p$ e k inteiro não-negativo, se

$$|||u|||_{k,p,\lambda} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \left[\rho^{-\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - P(x)|^p dx\right]^{1/p} < \infty$$

Lema 2.2.2: $|||\cdot|||_{k,p,\lambda}$ é uma semi-norma em $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demonstração: A demonstração se faz de forma análoga à demonstração do lema 2.1.1.

Com o objetivo de normalizar $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ consideremos a seguinte definição:

Definição 2.2.4: Seja $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$. Definimos

$$\|u\|_{k,p,\lambda} = |||u|||_{k,p,\lambda} + \|u\|_p .$$

Lema 2.2.3: $\|\cdot\|_{k,p,\lambda}$ é uma norma em $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demonstração: É análoga à demonstração do lema 2.1.2.

Estudaremos agora algumas propriedades do espaço - $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$. Sejam $\tau_k = \{P \in \mathcal{P}_k : P(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha x^\alpha$ onde $\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2 = 1\}$ e $A = \{\alpha = (\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n) \in \mathbb{R}^n : \alpha^i \geq 0$ e $|\alpha| = \alpha^1+\alpha^2+\ldots+\alpha^n \leq k\}$. Como A é finito, A é enumerável. Seja então $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_r$ uma enumeração para A.

Temos que $\{x^{\alpha_i} : \alpha_i \in A\}$ é uma base para $\mathcal{P}_k$. Logo, neste caso dimensão $\mathcal{P}_k$ é r.

Lema 2.2.4: O subconjunto τ_k do subespaço vetorial $\mathcal{P}_k$, do espaço das funções contínuas reais definidas em $\mathbb{R}^n$, é compacto.

Demonstração: Vamos definir $T : \mathbb{R}^r \to \mathcal{P}_k$ por $T(e_i) = x^{\alpha_i}$, onde $\{e_i\}_{i=1}^r$ é a base canônica de $\mathbb{R}^r$. Desta forma T é um isomorfismo, e então, é um homeomorfismo (ver [9]) isto é, T e T^{-1} são contínuos.

Verifiquemos que $T(S^{r-1}) = \tau_k$ onde $S^{r-1} = \{y \in \mathbb{R}^r : |y| = 1\}$ é a esfera r-dimensional unitária do $\mathbb{R}^r$. Seja $a = (a^1,\dots,a^r)$ um ponto de S^{r-1}. Portanto $a = \sum_{i=1}^{r} a^i e_i$ com $|a| = (\sum_{i=1}^{r} |a^i|^2)^{1/2} = 1$.

Assim $T(a) = \sum_{i=1}^{r} a^i\, T(e_i) = \sum_{i=1}^{r} a^i x^{\alpha_i}$, com $\Sigma\, |a^i|^2 = 1$, isto é, $T(a) \in \tau_k$, ou seja, $T(S^{r-1}) \subset \tau_k$.

Por outro lado se $P(x) = \sum_{|\alpha_i| \leq k} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i} \in \tau_k$, existe $x = (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_r})$ satisfazendo $|x| = (\Sigma |a_{\alpha_i}|^2)^{1/2} = 1$, isto é, $x \in S^{r-1}$ e é tal que $T(x) = P(x)$, ou seja, $\tau_k \subset T(S^{r-1})$. Desta forma podemos concluir que $T(S^{r-1}) = \tau_k$.

Agora como S^{r-1} é compacto e T é contínuo, temos que τ_k é compacto, o que prova o lema.

Se $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n$ com $\alpha^i \geq 0$ para todo $i = 1,2,\dots,n$ e $u(x)$ é uma função de $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ denotaremos por

$$\alpha! = \alpha^1!\ \alpha^2! \dots \alpha^n!$$

$$|\alpha| = \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha^1}\ x_2^{\alpha^2} \dots x_n^{\alpha^n}$$

$$D^\alpha u(x) = \begin{cases} \dfrac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha^1}\ \partial x_2^{\alpha^2} \dots \partial x_n^{\alpha^n}} & \text{se } |\alpha| > 0 \\ u(x) & \text{se } |\alpha| = 0 \end{cases}$$

<u>Lema 2.2.5</u>: Sejam $P(x) \in \mathcal{P}_k$ e $E \subset S(x_0,\rho)$ verificando a relação $|E| \geq A\,\rho^n$, onde A é uma constante positiva finita. Então existe uma constante positiva c_1 tal que, para cada n-upla de inteiros não-negativos $\alpha = (\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n)$ temos

$$\left|\left[D^\alpha\, P(x)\right]_{x=x_0}\right|^p \leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_E |P(x)|^p\,dx$$

<u>Demonstração</u>: Seja τ_k o subconjunto de $\mathcal{P}_k$ considerado anteriormente. Seja $\mathcal{F}$ a classe das funções reais $u(x)$ mensuráveis, definidas em $\mathbb{R}^n$, com suporte em $S(0,1)$ e tal que

$$0 < u(x) \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx \geq A\,.$$

Coloquemos

$$\gamma(A) = \inf_{\substack{P(x)\in\tau_k \\ u\in\mathcal{F}}} \int_{S(0,1)} |P(x)|^p\,u(x)\,dx\,.$$

Vamos mostrar que

$$\gamma(A) = \min_{\substack{P(x)\in\tau_k \\ u\in\mathcal{F}}} \int_{S(0,1)} |P(x)|^p\,u(x)\,dx\,. \tag{25}$$

Com efeito, pela definição de ínfimo temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $P_n(x) \in \tau_k$ e $u_n(x) \in \mathcal{F}$ tal que

$$\gamma(A) + \frac{1}{n} > \int_{S(0,1)} |P_n(x)|^p\,u_n(x)\,dx\,.$$

Pelo lema 2.2.4, vimos que τ_k é compacto e então da sequência $\{P_n(x)\} \subset \tau_k$ é possível extrairmos uma subsequência $\{P_{n_i}(x)\}$ que converge uniformemente em τ_k para um polinômio $P^*(x) \in \tau_k$. (Estamos considerando $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ com a topologia da convergência uniforme.)

Agora, como $0 < u(x) \leq 1$, suporte de $u(x)$ está contido em $S(0,1)$ para toda $u(x) \in \mathcal{J}$ e $|S(0,1)|$ é finita, existe $r > 0$ tal que

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \int_{S(0,1)} |u(x)|^2\, dx \leq \int_{S(0,1)} dx = |S(0,1)| \leq r^2.$$

Portanto, para toda $u \in \mathcal{J}$ temos $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq r$. Isto nos mostra que $\mathcal{J}$ está contido na esfera com centro na origem e raio r do espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Como o espaço dual do espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ é o próprio $L^2(\mathbb{R}^n)$, temos pelo teorema de Alaoglu-Bourbaki que a esfera de centro na origem e raio unitário, $\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo uma homotetia de $\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}$, isto é, a esfera de raio r, também é compacta na topologia fraca de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Desta forma, da sequência $\{u_n\}$ podemos extrair uma subsequência $\{u_{n_i}\}$ que converge fracamente em $L^2(\mathbb{R}^n)$ para uma função $u^* \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Vamos verificar que $u^* \in \mathcal{J}$.

Da definição de convergência fraca em $L^2(\mathbb{R}^n)$, temos que se $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é tal que suporte de v está contido em $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* v\,dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} u_{n_i} v\,dx = 0 ,$$

pois suporte de u_{n_i} está contido em $S(0,1)$ e suporte de v está contido em $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$.

Portanto para toda $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ com suporte de v contido em $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* v\,dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)} u^* v\,dx = 0 ,$$

donde $u^* = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$ e daí suporte de u está contido em $S(0,1)$.

Por outro lado se $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é tal que suporte de v está contido em $S(0,1)$ e $v > 0$ temos

$$\int_{S(0,1)} u^* v\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^* v\,dx$$

$$= \lim \int_{\mathbb{R}^n} u_{n_i} v\,dx > 0 ,$$

o que implica $u^* > 0$ em $S(0,1)$.

Finalmente, se $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ é tal que suporte de v está contido em $S(0,1)$ e $v > 0$, como $u_{n_i} \leq 1$, segue que

$$\int_{S(0,1)} (1-u^*)v dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1-u^*) v dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} (1-u_{n_i}) v dx \geq 0 .$$

Logo $1-u^* \geq 0$ em $S(0,1)$ donde concluímos que suporte de u^* está contido em $S(0,1)$, $0 < u^*(x) \leq 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^*(x)dx = \int_{S(0,1)} u^*(x)dx = \lim \int_{S(0,1)} u_{n_i}(x)dx \geq A \quad ,$$

ou seja, $u^* \in \mathcal{J}$.

Pela definição de $\gamma(A)$ temos que

$$\gamma(A) \leq \int_{S(0,1)} |P_{n_i}(x)|^p \, u_{n_i}(x)dx < \gamma(A) + \frac{1}{n_i} \quad ,$$

para todo $n_i \in \mathbb{N}$. Fazendo $n_i \to \infty$ vem que

$$\gamma(A) = \int_{S(0,1)} |P^*(x)|^p \, u^*(x) \, dx \quad .$$

Com isto mostramos que o ínfimo, $\gamma(A)$, do conjunto $I = \{\int P(x)^p u(x)dx : P \in \tau_k, \; u \in \mathcal{J}\}$ pertence a I. Então $\gamma(A) = \min I$, o que prova (25).

Agora se $P(x) \in \tau_k$, temos que $P(x) \not\equiv 0$ pois $\sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 = 1$ e se $u(x) \in \mathcal{J}$ segue que $u(x) > 0$. Desta forma, para todo $P(x) \in \tau_k$ e para toda $u \in \mathcal{J}$

$$\int_{S(0,1)} |P(x)|^p \, u(x) \, dx > 0 \quad ,$$

e daí $\gamma(A) > 0$.

Seja $E \subset S(0,1)$ um conjunto mensurável tal que $|E| \geq A$. Assim a função característica em E, χ_E pertence a $\mathcal{J}$, e então para todo $P(x) \in \tau_k$ temos que

$$(26) \qquad \gamma(A) \leq \int_{S(0,1)} |P(x)|^p \, \chi_E(x) \, dx = \int_E |P(x)|^p \, dx$$

Se $P(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{P}_k$, o polinômio normalizado $P(x)\,.\left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{-1/2}$ pertence a τ_k. De fato, temos que

$$P(x)\,.\left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{-1/2} = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha x^\alpha \Big/ \left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{1/2}$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha x^\alpha \quad ,$$

onde $b_\alpha = \dfrac{a_\alpha}{\left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{1/2}}$. Então

$$\sum_{|\alpha|\leq k} |b_\alpha|^2 = \sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2 \Big/ \sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2 = 1 \quad ,$$

e segue portanto que $P(x)\,.\left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{-1/2}$ pertence a τ_k. Então utilizando (26) segue que

$$\gamma(A) \leq \int_E \left| P(x) \left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{-1/2} \right|^p dx$$

$$= \left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{-p/2} \int_E |P(x)|^p \, dx \quad .$$

Logo

$$\left[\sum_{|\alpha|\leq k} |a_\alpha|^2\right]^{p/2} \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_E |P(x)|^p \, dx \quad .$$

Levando em conta que $|a_\alpha|^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2$ para todo $|\alpha| \leq k$, vem que

$$|a_\alpha|^p \leq \left[\sum_{|a_\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2\right]^{p/2} ,$$

donde se conclui que para todo $|\alpha| \leq k$

$$(27) \qquad |a_\alpha|^p \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_E |P(x)|^p \, dx$$

Seja agora $P(x) \in \mathcal{P}_k$ e $E \subset S(x_0, \rho)$ mensurável tal que $|E| \geq \rho^n A$. Indicaremos com $y = T(x)$ a transformação definida por $y = \dfrac{x - x_0}{\rho}$.

Usando a fórmula para mudança de variáveis temos que

$$(28) \qquad \int_E |P(x)|^p \, dx = \int_{T(E)} |P(x_0 + \rho y)|^p \, J(x_0 + \rho y) \, dy$$

onde

$$J(x_0 + \rho y) = \det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial (x_{01} + \rho y_1)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial (x_{01} + \rho y_1)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial (x_{01} + \rho y_1)}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial (x_{02} + \rho y_2)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial (x_{02} + \rho y_2)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial (x_{02} + \rho y_2)}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \dfrac{\partial (x_{0n} + \rho y_n)}{\partial y_1} & \dfrac{\partial (x_{0n} + \rho y_n)}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial (x_{0n} + \rho y_n)}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \rho & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho \end{bmatrix}_{n \times n} = \rho^n$$

Substituindo $J(x_0+\rho y) = \rho^n$ em (28) obtemos

$$(29) \qquad \int_E |P(x)|^p \, dx = \int_{T(E)} |P(x_0+\rho y)|^p \rho^n \, dy$$

$$= \rho^n \int_{T(E)} |P(x_0+\rho y)|^p \, dy \quad .$$

Por outro lado temos que $T(E) \subset S(0,1)$ e

$$|E| = \int_E dx = \int_{T(E)} J(x_0+\rho y) dx = \rho^n \int_{T(E)} dx = \rho^n \, |T(E)| \; .$$

Portanto

$$|T(E)| = \rho^{-n} \, |E| \geq \rho^{-n} \rho^n A = A \; .$$

Agora como $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{[D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha$, segue que

$$P(x_0+\rho y) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{[D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} (\rho y)^\alpha$$

$$= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\rho^{|\alpha|} \, [D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} y^\alpha$$

Então como $|T(E)| \geq A$, $T(E) \subset S(0,1)$ e $P(x_0+\rho y) \in$ $\in \mathcal{P}_k$ temos por (27), (28) e (29) que

$$\left| \frac{\rho^{|\alpha|} \, [D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} \right|^p \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_{T(E)} |P(x_0+\rho y)|^p \, dy$$

$$= \frac{1}{\gamma(A)\rho^n} \int_E |P(x)|^p \, dx \quad .$$

Assim,

$$|\left[D^\alpha P(x)\right]_{x=x_0}|^p \leq \frac{(\alpha!)^p}{\gamma(A) \; \rho^n \; \rho^{|\alpha|p}} \int_E |P(x)|^p \, dx \quad ,$$

e fazendo $c_1 = \frac{(\alpha!)^p}{\gamma(A)}$, concluímos que

$$|\left[D^\alpha P(x)\right]_{x=x_0}|^p \leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_E |P(x)|^p \, dx \quad .$$

cqd.

<u>Lema 2.2.6</u>: Seja $u(x) \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$. Então para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ existe um único polinômio $P_k(x,x_0,\rho,u) \in \mathcal{P}_k$ tal que

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P(x)|^p dx = \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P_k(x,x_0,\rho,u)|^p \, dx \quad .$$

<u>Demonstração</u>: Seja $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$ um polinômio genérico de $\mathcal{P}_k$. Já foi visto que a cada polinômio de $\mathcal{P}_k$, está associado um ponto de $\mathbb{R}^r$, para algum r, associando à coordenada i do ponto um coeficiente a_{α^i} de $P(x)$ convenientemente ordenado. Ou seja,

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i} \equiv (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \ldots, a_{\alpha_r}) = (a_{\alpha_i})_{i=1}^r$$

Vamos definir $v : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ por

$$v((a_{\alpha_i})) = \|u-P(x)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

Assim v é uma aplicação contínua, real e positiva.

Seja $P_\theta(x) = \sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha^{(\theta)} x^\alpha = (a_\alpha^{(\theta)})$, $\theta = 1,2,\ldots$, uma sequência em $\mathcal{P}_k$ tal que $(a_\alpha^{(\theta)}) \to \infty$ quando $\theta \to \infty$. Vamos verificar que $v((a_\alpha^{(\theta)})) \to \infty$. Com efeito, como $(a_\alpha^{(\theta)}) \to \infty$, temos que para toda constante $M > 0$, existe $\theta_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|(a_\alpha^{(\theta)})| > M$ para todo $\theta > \theta_0$.

Agora pelo lema 2.2.5, para todo $M > 0$ e todo $\theta > \theta_0$, temos que

$$\begin{aligned} M &< |(a_\alpha^\theta)|^p \\ &\leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |P_\theta(x)|^p\, dx \\ &= \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \|P_\theta(x)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} . \end{aligned}$$

Isto significa que $\|P_\theta(x)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \to \infty$ quando $(a_\alpha^{(\theta)}) \to \infty$.

Levando em conta que

$$\begin{aligned} \left| \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} - \|P_\theta(x)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \right|^p &\leq \|u-P_\theta(x)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \\ &= v((a_\alpha^{(\theta)})) \end{aligned}$$

temos que $v((a_\alpha^{(\theta)}) \to \infty$ quando $(a_\alpha^{(\theta)}) \to \infty$.

Por outro lado, como v é positiva, existe o ínfimo de v. Então existe uma sequência $(b_\alpha^{(\theta)})$ tal que $v((b_\alpha^{(\theta)})) \to$ $\to \inf v((a_\alpha))$. Mas $|(b_\alpha^{(\theta)})| \not\to \infty$, pois caso contrário teríamos $\infty = \lim v((b_\alpha^{(\theta)})) = \inf v((a_\alpha))$ o que é absurdo. Logo, existe $a > 0$ tal que $(b_\alpha^{(\theta)}) \in B_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^r : |x| \leq a\}$ para todo $\theta = 1,2,\ldots$.

Como v é contínua e $B_a(0)$ é compacto, segue que $v(B_a(0))$ é compacto. Então $\lim v((b_\alpha^{(\theta)})) \in v(B_a(0))$. Assim $\inf v((a_\alpha)) = v((b_\alpha))$ com $(b_\alpha) \in B_a(0)$, isto é, existe $P_k(x,x_0,\rho,u) = \sum_{|\alpha|\leq k} b_\alpha x^\alpha$ pertencente a $\mathcal{P}_k$ tal que

$$\inf v((a_\alpha)) = \|u-P_k(x,x_0,\rho,u)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} ,$$

ou ainda,

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u-P(x)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \|u-P_k(x,x_0,\rho,u)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

o que demonstra a existência do polinômio $P_k(x,x_0,\rho,u)$.

Vamos mostrar agora a unicidade de $P_k(x,x_0,\rho,u)$. Consideremos primeiramente o conjunto

$$E_k = u(x) - \mathcal{P}_k = \{u(x)-P(x) \ : \ P(x) \in \mathcal{P}_k\} .$$

Como $\mathcal{P}_k$ é convexo, o mesmo ocorre com E_k .

Pelo que vimos anteriormente, existe $u(x)-P_k(x,x_0,\rho,u)$ pertencente a E_k tal que

$$d = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u-P(x)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \|u-P_k(x,x_0,\rho,u)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} .$$

Suponhamos que existe $u(x)-Q_k(x,x_0,\rho,u) \in E_k$ com $d = \|u-Q_k(x,x_0,\rho,u)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$ e que

$$\|u-Q_k(x,x_0,\rho,u)-(u-P_k(x,x_0,\rho,u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \varepsilon > 0 ,$$

isto é, $\|P_k(x,x_0,\rho,u)-Q_k(x,x_0,\rho,u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho)} = \varepsilon > 0$.

Agora como

$$\left\|\frac{u-P_k(x,x_0,\rho,u)}{d^{1/p}}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \left\|\frac{u-Q_k(x,x_0,\rho,u)}{d^{1/p}}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = 1 ,$$

pela convexidade uniforme de $L^p(\Omega(x_0,\rho))$ temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\|\frac{u-P_k(x,x_0,\rho,u)+u-Q_k(x,x_0,\rho,u)}{2\ d^{1/p}}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq 1-\delta ,$$

ou seja,

$$\left\|\frac{u-P_k(x,x_0,\rho,u)+u-Q_k(x,x_0,\rho,u)}{2}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq (1-\delta)d^{1/p} .$$

Mas como $1-\delta < 1$, vem que $(1-\delta)d^{1/p} < d^{1/p}$, e então

$$\left\|\frac{u-P_k(x,x_0,\rho,u)+u-Q_k(x,x_0,\rho,u)}{2}\right\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} < d^{1/p} .$$

Por outro lado levando em conta que E_k é convexo, tem-se que

$$\frac{u-P_k(x,x_0,\rho,u)+u-Q_k(x,x_0,\rho,u)}{2} \in E_k .$$

E obtemos

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_k} \|u-P(x)\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq \left\|\frac{u-P_k(x,x_0,\rho,u)+u-Q_k(x,x_0,\rho,u)}{2}\right\|^p_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

o que implica

$$d^{1/p} \leq \left\| \frac{u-P_k(x,x_0,\rho,u)+u-Q_k(x,x_0,\rho,u)}{2} \right\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

o que é uma contradição. Portanto, devemos ter que

$$\|P_k(x,x_0,\rho,u)-Q_k(x,x_0,\rho,u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = 0 \quad ,$$

isto é, $P_k(x,x_0,\rho,u) = Q_k(x,x_0,\rho,u)$.

Com isto concluímos que existe um único polinômio $P_k(x,x_0,\rho,u) \in \mathcal{P}_k$ tal que

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P(x)|^p dx = \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P_k(x,x_0,\rho,u)|^p dx$$

cqd.

No que se segue usaremos a notação $P_k(x,x_0,\rho)$ para $P_k(x,x_0,\rho,u)$ e colocaremos $a_\alpha(x_0,\rho) = [D^\alpha P_k(x,x_0,\rho)]_{x=x_0}$.

<u>Lema 2.2.7</u>: Se $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$, existe uma constante positiva c_2 tal que, para quaisquer $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\rho \in (0,d(\Omega)]$ e h inteiro não-negativo temos

$$\int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p dx \leq c_2 \; |||u|||_{k,p,\lambda}^p \; 2^{-h\lambda} \; \rho^\lambda \; .$$

<u>Demonstração</u>: Sejam $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\rho \in (0,d(\Omega)]$ e h inteiro não-negativo. Temos que

$$|P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p \leq 2^p|P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-u(x)|^p +$$
$$+ 2^p|P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})-u(x)|^p \; .$$

Integrando sobre $\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})$ vem que

$$\int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p\,dx \leq$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-u(x)|^p\,dx \;+$$

$$+\; 2^p \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})-u(x)|^p\,dx$$

Agora como $\rho 2^{-h-1} \leq \rho 2^{-h}$ temos que

$$\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1}) \subset \Omega(x_0,\rho 2^{-h}) \quad ,$$

donde

$$(30) \qquad \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p\,dx$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h}) - u(x)|^p\,dx \;+$$

$$+\; 2^p \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})-u(x)|^p\,dx$$

Como $h \geq 0$, temos que $\rho 2^{-h} \leq d(\Omega)$ e $\rho 2^{-h-1} \leq d(\Omega)$ quando $\rho \leq d(\Omega)$ e pelo lema 2.2.6, obtemos que

$$(31) \qquad \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-u(x)|^p dx = \inf_{P\in\mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h})} |u(x)-P(x)|^p\,dx$$

e

$$(32) \qquad \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1}) - u(x)|^p dx = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |u(x) - P(x)|^p dx \, .$$

Por outro lado, como $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ temos que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$(33) \qquad \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h})} |u(x) - P(x)|^p dx \le (\rho\, 2^{-h})^{\lambda} \, |||u|||_{k,p,\lambda}^p$$

e

$$(34) \qquad \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |u(x) - P(x)|^p dx \le (\rho\, 2^{-h-1})^{\lambda} \, |||u|||_{k,p,\lambda}^p \, .$$

Substituindo (31) e (32) em (30) e usando (33) e (34) segue que

$$\int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h}) - P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p \, dx \le$$

$$\le 2^p (\rho 2^{-h})^{\lambda} \, |||u|||_{k,p,\lambda}^p + 2^p (\rho 2^{-h-1})^{\lambda} \, |||u|||_{k,p,\lambda}^p$$

$$= 2^p \, \rho^{\lambda} (2^{-h\lambda} + 2^{-h\lambda} \, 2^{-\lambda}) \, |||u|||_{k,p,\lambda}^p$$

$$= 2^p \, \rho^{\lambda} \, 2^{-h\lambda} (1 + 2^{-\lambda}) \, |||u|||_{k,p,\lambda}^p$$

$$= c_2 \, |||u|||_{k,p,\lambda}^p \, 2^{-h\lambda} \, \rho^{\lambda} \, ,$$

onde $c_2 = 2^p (1 - 2^{-\lambda})$.

cqd.

Lema 2.2.8: Seja Ω tal que $|\Omega(x_0,\rho)| \ge A\rho^n$, para uma constante positiva A , para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo

$\rho \in (0,d(\Omega)]$. Seja $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$. Então existe uma constante positiva c_3 tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$, todo i inteiro não-negativo e todo $|\alpha| \leq k$ temos

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,\rho 2^{i})| \leq c_3 |||u|||_{k,p,\lambda} \sum_{h=0}^{i-1} 2^{h(\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p})} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

<u>Demonstração</u>: Sejam x_0, ρ, i e α como nas hipóteses do lema. Temos que

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,\rho 2^{-i})| = \left|\sum_{h=0}^{i-1} (a_\alpha(x_0,\rho 2^{-h})-a_\alpha(x_0,\rho 2^{-h-1}))\right|$$

$$\leq \sum_{h=0}^{i-1} |a_\alpha(x_0,\rho 2^{-h})-a_\alpha(x_0,\rho 2^{-h-1})| ,$$

donde pela definição dos a_α vem que

$$(35) \qquad |a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,\rho 2^{-i})| \leq$$

$$\leq \sum_{h=0}^{i-1} \left|[D^\alpha P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})]_{x=x_0} - [D^\alpha P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})]_{x=x_0}\right|$$

$$= \sum_{h=0}^{i-1} \left|[D^\alpha (P_k(x,x_0,\rho 2^{-h}) - P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1}))]_{x=x_0}\right| .$$

Como $P(x) = P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1}) \in \mathcal{P}_k$, do lema 2.2.5 obtemos

$$\left|[D^\alpha (P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1}))]_{x=x_0}\right|^p \leq$$

$$\leq \frac{c_1}{(\rho 2^{-h-1})^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})} |P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p \, dx$$

Logo, a expressão

$$|[D^\alpha(P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1}))]_{x=x_0}|$$

fica majorada por

$$(35)\qquad c_1^{\frac{1}{p}}\,\rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}\,2^{(h+1)(\frac{n}{p}+|\alpha|)}\left[\int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})}|P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Substituindo (35) em (34) tem-se que

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,\rho 2^{-i})|$$

é majorada por

$$c_1^{\frac{1}{p}}\,\rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}\sum_{h=0}^{i-1}2^{(h+1)(\frac{n}{p}+|\alpha|)}\left[\int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1})}|P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Pelo lema 2.2.7 temos

$$\left[\int_{\Omega(x_0,\rho 2^{-h-1}}|P_k(x,x_0,\rho 2^{-h})-P_k(x,x_0,\rho 2^{-h-1})|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}\le c_2^{\frac{1}{p}}\,|||u|||_{k,p,\lambda}\,2^{\frac{-h\lambda}{p}}\,\rho^{\frac{\lambda}{p}},$$

donde

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,\rho 2^{-i})|\le$$

$$\le c_1^{\frac{1}{p}}\,\rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}\sum_{h=0}^{i-1}c_2^{\frac{1}{p}}\,|||u|||_{k,p,\lambda}\,2^{-\frac{h\lambda}{p}}\,\rho^{\frac{\lambda}{p}}\,2^{(h+1)(\frac{n}{p}+|\alpha|)}$$

$$=(c_1c_2)^{\frac{1}{p}}\,|||u|||_{k,p,\lambda}\sum_{h=0}^{i-1}2^{-\frac{h\lambda}{p}}\,2^{h(\frac{n}{p}+|\alpha|)}\,2^{\frac{n}{p}+|\alpha|}\,\rho^{\frac{\lambda}{p}}\,\rho^{-\frac{n}{p}-|\alpha|}$$

$$= 2^{\frac{n}{p}+|\alpha|}\,(c_1c_2)^{\frac{1}{p}}\,|||u|||_{k,p,\lambda}\sum_{h=0}^{i-1} 2^{h(\frac{n}{p}+|\alpha|-\frac{\lambda}{p})}\,\rho^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{p}-|\alpha|}$$

$$= c_3\;|||u|||_{k,p,\lambda}\sum_{h=0}^{i-1} 2^{h\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}}\,\rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}\qquad,$$

onde $c_3 = 2^{\frac{n}{p}+|\alpha|}(c_1c_2)^{\frac{1}{p}}$.

cqd.

Lema 2.2.9: Seja Ω nas hipóteses do lema 2.2.8. Sejam p,λ números reais com $1\leq p<\infty$ e $0\leq\lambda<n+(h+1)p$ e h um inteiro tal que $0\leq h\leq k-1$. Então $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demonstração: Como por hipótese $h < k$, temos que a classe dos polinômios de grau menor ou igual a h está contida na classe do polinômio de grau menor ou igual a k , ou seja, $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}_k$. Seja $u \in \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$ qualquer, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ tem-se que

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_k}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|u(x)-P(x)|^p dx \leq \inf_{P\in\mathcal{P}_h}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|u(x)-P(x)|^p dx$$

$$\leq \rho^{\lambda}\;|||u|||_{h,p,\lambda}$$

donde se conclui que

$$|||u|||_{k,p,\lambda} \leq |||u|||_{h,p,\lambda} < \infty \;.$$

Portanto, $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ e fica provado que

$$\mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) \quad .$$

Vamos verificar agora a inclusão $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$. Mostremos primeiramente que $a_\alpha(x_0,d(\Omega))$ é limitada.

Do lema 2.2.8, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, para todo i inteiro não-negativo temos

$$|a_\alpha(x_0,d(\Omega))-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})| \leq \tag{36}$$

$$\leq c_3 |||u|||_{k,p,\lambda} \sum_{s=0}^{i-1} 2^{s\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} d(\Omega)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

Pela fórmula para a soma dos i-primeiros termos de uma progressão geométrica temos

$$\sum_{s=0}^{i-1} 2^{s\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} = \frac{2^{i\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1} \leq \frac{2^{i\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}}}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1} .$$

Substituindo essa desigualdade em (36) obtemos

$$|a_\alpha(x_0,d(\Omega))-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})| \leq$$

$$\leq c_3 |||u|||_{k,p,\lambda}\, d(\Omega)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \frac{2^{i\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}}}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1} .$$

Mas levando em conta que $h < |\alpha|$ obtêm-se

$$\frac{1}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1} \leq \frac{1}{2^{\frac{n+hp-\lambda}{p}} - 1}$$

e daí ,

(37) $$|a_\alpha(x_0,d(\Omega))-a_\alpha(x_0,d(\Omega))2^{-i})| \le$$

$$\le \; c_3 |||u|||_{k,p,\lambda} \left(\frac{d(\Omega)}{2^{i}}\right)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \frac{1}{2^{\frac{n+hp-\lambda}{p}}-1}$$

$$= \; c_4 |||u|||_{k,p,\lambda} \left(\frac{d(\Omega)}{2^{i}}\right)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

onde $c_4 = \dfrac{c_3}{2^{\frac{n+hp-\lambda}{2}}-1}$.

Seja agora ρ um número real tal que $\rho \in (0,d(\Omega)$. Observemos que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} < \rho \le \frac{d(\Omega)}{2^{i}}$. Com efeito, temos que $\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} < \rho \le \frac{d(\Omega)}{2^{i}}$ se e somente se $\frac{d(\Omega)}{2} < 2^{i}\rho \le d(\Omega)$. Então se $\frac{d(\Omega)}{2} < \rho\, d(\Omega)$ basta tomar $i = 0$. Suponhamos então $0 < \rho \le \frac{d(\Omega)}{2}$. Temos $2^{i} \to \infty$, quando $i \to \infty$, logo deve existir $j \in \mathbb{N}$ tal que $2^{j}\rho > \frac{d(\Omega)}{2}$. Assim temos que o conjunto $B = \{2^{j}\rho : j \in \mathbb{N}$ e $2^{j}\rho > \frac{d(\Omega)}{2}\}$ não é vazio. Seja i o menor inteiro para o qual $2^{i}\rho \in B$. Então $2^{i}\rho > \frac{d(\Omega)}{2}$ e $2^{i}\rho \le d(\Omega)$, pois se $2^{i}\rho > d(\Omega)$ teríamos $2^{i-1}\rho > \frac{d(\Omega)}{2}$ contrariando a escolha de i . Portanto existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{d(\Omega)}{2} < 2^{i}\rho \le d(\Omega)$.

Temos por hipótese que $\lambda < n+(h+1)p$, e se $|\alpha| > h$ ficamos com $\lambda < n+(h+1)p \le n+|\alpha|p$ e então $\lambda - n - |\alpha| < 0$.

Assim para um i tal que $\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} < \rho \leq \frac{d(\Omega)}{2^i}$ temos

$$\rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \geq \left(\frac{d(\Omega)}{2^i}\right)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} .$$

Logo substituindo essa desigualdade em (37) obtemos

$$(38) \qquad |a_\alpha(x_0,d(\Omega))-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})| \leq c_4 |||u|||_{k,p,\lambda}\, \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} .$$

Por outro lado, pela definição dos a_α

$$a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i}) = \left[D^\alpha(P_k(x,x_0,\rho)-P_k(x,x_0 d(\Omega)2^{-i}))\right]_{x=x_0} ,$$

e pelo lema 2.2.5 aplicado ao polinômio

$$P_k(x,x_0,\rho) - P_k(x,x_0,d(\Omega)2^{-i})$$

temos que

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})|^p \leq$$

$$\leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |P_k(x,x_0,\rho)-P_k(x,x_0,d(\Omega)2^{-i})|^p\, dx$$

$$\leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} 2^p(|P_k(x,x_0,\rho)-u(x)|^p + P_k(x,x_0,d(\Omega)2^{-i})-u(x)|^p)dx$$

$$= \frac{2^p c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |P_k(x,x_0,\rho)-u(x)|^p dx + \int_{\Omega(x_0,\rho)} |P_k(x,x_0,d(\Omega)2^{-i})-u(x)|^p dx\right]$$

Usando a definição de $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ e levando em conta que

$\Omega(x_0,\rho) \subset \Omega(x_0,d(\Omega)2^{-i})$ segue que

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i}|^p \leq$$

$$\leq \frac{2^p c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}}\left[|||u|||^p_{k,p,\lambda}\ \rho^\lambda + \int_{\Omega(x_0,d(\Omega)2^{-i})} |P_k(x,x_0,d(\Omega)2^{-i})-u(x)|^p\, dx\right]$$

$$\leq \frac{2^p c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}}\left[|||u|||^p_{k,p,\lambda}\ \rho^\lambda + |||u|||^p_{k,p,\lambda}\ (d(\Omega)2^{-i})^\lambda\right]$$

$$= c_5\,\frac{|||u|||^p_{k,p,\lambda}}{\rho^{n+|\alpha|p}}\left[\rho^\lambda + \left(\frac{d(\Omega)}{2^i}\right)^\lambda\right] \quad ,$$

onde $c_5 = 2^p c_1$. Como $\rho > \frac{d(\Omega)}{2^{i+1}}$ e notando que $\lambda \geq 0$ temos $\rho^\lambda \geq \left(\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}}\right)^\lambda$. Logo $2^\lambda\ \rho^\lambda \geq \left(\frac{d(\Omega)}{2^i}\right)^\lambda$ e então $\frac{1}{\rho^{n+|\alpha|p}}\left(\frac{d(\Omega)}{2^i}\right)^\lambda \leq 2^\lambda\ \rho^{\lambda-n-|\alpha|}$. Desta forma

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})|^p \leq$$

$$\leq c_5|||u|||^p_{k,p,\lambda}\left[\rho^{\lambda-n-|\alpha|p} + 2^\lambda\ \rho^{\lambda-n-|\alpha|p}\right]$$

$$= c_5\ (1+2^\lambda)\ |||u|||^p_{k,p,\lambda}\ \rho^{\lambda-n-|\alpha|p} \quad ,$$

donde

$$(39) \quad |a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})| \leq [c_5(1+2^\lambda)]^{\frac{1}{p}}|||u|||_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

Agora somando e subtraindo $a_\alpha(x_0 d(\Omega)2^{-i})$ em

$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega))|$ temos que

$$|a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \leq$$

$$\leq |a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})| + |a_\alpha(x_0,d(\Omega)-a_\alpha(x_0,d(\Omega)2^{-i})|$$

e por (38) e (39) vem que

$$(40) \qquad |a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \leq$$

$$\leq \left[c_5(1+2\lambda)\right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{k,p,\lambda}\, \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} + c_4 |||u|||_{k,p,\lambda}\, \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

$$= c_6\, |||u|||_{k,p,\lambda}\, \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \quad ,\ \text{onde} \quad c_6 = [c_5(1+2^\lambda)]^{\frac{1}{p}} + c_4 \quad .$$

Mas como

$$|a_\alpha(x_0,\rho)|-|a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \leq |a_\alpha(x_0,\rho)-a_\alpha(x_0,d(\Omega))|$$

temos por (40) que

$$(41) \qquad |a_\alpha(x_0,\rho)| \leq c_6 |||u|||_{k,p,\lambda}\, \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} + |a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \quad .$$

Agora para $|\alpha| > h$, temos pelo lema 2.2.5 que

$$(42) \quad |a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \leq \left(\frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}}\right)^{\frac{1}{p}} \|P_k(x,x_0,d(\Omega))\|_{L^p(\Omega(x_0,d(\Omega)))}$$

$$\leq \left(\frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\|P_k(x,x_0,d(\Omega))-u\|_{L^p(\Omega(x_0,d(\Omega)))} + \|u\|_{L^p(\ (x_0,d(\Omega)))}\right] \quad .$$

Pela definição do $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ e pelo lema 2.2.6 vem que

$$(43) \qquad \|P_k(x,x_0,d(\Omega))-u\|_{L^p(\Omega(x_0,d(\Omega)))} \leq |||u|||_{k,p,\lambda}\, d(\Omega)^{\lambda} ,$$

donde substituindo (43) em (42) obtém-se

$$|a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \leq \left(\frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}}\right)^{\frac{1}{p}} \left[|||u|||_{k,p,\lambda} d(\Omega)^{\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega(x_0,d(\Omega)))}\right].$$

Se $M = \max\{1,d(\Omega)\}$ e como $\Omega(x_0,d(\Omega)) \subset \Omega$ temos que

$$(44) \qquad |a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \leq \left(\frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}}\right)^{\frac{1}{p}} M\,(|||u|||_{k,p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)})$$

$$= c_7\, \|u\|_{k,p,\lambda} ,$$

onde $c_7 = M\left(\dfrac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Assim para $|\alpha| > h$ e para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ a função $a_\alpha(x_0,d(\Omega))$ é limitada. Então existe $\bar{\rho} \leq d(\Omega)$ tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, todo $|\alpha| > k$ e todo $\rho \leq \bar{\rho}$ temos

$$(45) \qquad |a_\alpha(x_0,d(\Omega))| \leq c_7\, \|u\|_{k,p,\lambda}\, \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} .$$

Com efeito, suponhamos que para todo $\bar{\rho} \leq d(\Omega)$, existem $\rho \leq \bar{\rho}$, $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $|\alpha| > 0$ tal que

$$|a_\alpha(x_0,d(\Omega))| > c_7 \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} .$$

Então, quando $\bar{\rho} \to 0$, implica que $\rho \to 0$ e daí teríamos que $\rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \to \infty$, pois $\lambda-n-|\alpha|p < 0$ para $|\alpha| > h$ e então $a_\alpha(x_0,d(\Omega))$ deixaria de ser limitada em $\bar{\Omega}$.

Agora, para todo $\rho \leq \bar{\rho}$, todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo α tal que $k \geq |\alpha| > h$, de (41) e (45) vem que

$$(46) \qquad |a_\alpha(x_0,\rho)| \leq c_6 \|\!|u|\!\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} + c_7 \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|}{p}}$$

$$\leq (c_6+c_7) \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

$$= c_8 \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} ,$$

onde $c_8 = c_6+c_7$.

Vamos considerar os seguintes casos:

(i) $0 < \rho \leq \bar{\rho}$.

Temos que

$$(47) \qquad \left[\inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} \left|u(x) - \sum_{|\alpha|\leq h} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - P_k(x,x_0,\rho)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} \Big|P_k(x,x_0,\rho) - \sum_{|\alpha|\leq h} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \Big|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} .$$

Levando em conta que

$$\left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P_k(x,x_0,\rho)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq |||u|||_{k,p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda}{p}}$$

e

$$P_k(x,x_0,\rho) - \sum_{|\alpha|\leq h} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha =$$

$$= \sum_{|\alpha|\leq} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha - \sum_{|\alpha|\leq h} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha$$

$$= \sum_{h<|\alpha|\leq k} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0) \quad ,$$

de (47) vem que

$$(48) \qquad \left[\inf_{P\in\mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq |||u|||_{k,p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \Big\| \sum_{h<|\alpha|\leq k} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \Big\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$\leq |||u|||_{k,p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \sum_{h<|\alpha|\leq k} \Big\| \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \Big\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

Substituindo (46) em (48) temos que

$$\left[\inf_{P\in\mathcal{P}_h}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|u(x)-P(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq |||u|||_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \sum_{h<|\alpha|\leq k}\frac{c_8}{\alpha!}\ \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}\ \|(x-x_0)^{\alpha}\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

e levando em conta que

$$\|(x-x_0)^{\alpha}\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq \|\rho^{\alpha}\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} = \rho^{|\alpha|}\ |\Omega(x_0,\rho)|^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \rho^{|\alpha|}\ (L\ \rho^n)^{\frac{1}{p}} = L^{\frac{1}{p}}\ \rho^{\frac{n+|\alpha|p}{p}}$$

para alguma constante $L > 0$ e $\sum_{h<|\alpha|\leq k}\frac{1}{\alpha!} \leq M$ para alguma constante $M > 0$, vem que

$$\left[\inf_{P\in\mathcal{P}_h}\int_{\Omega(x_0,\rho)}|u(x)-P(x)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \tag{49}$$

$$\leq |||u|||_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \sum_{h<|\alpha|\leq k}\frac{c_8}{\alpha!}\ \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}\ L^{\frac{1}{p}}\ \rho^{\frac{n+|\alpha|p}{p}}$$

$$\leq \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}} + c_8\ M\ L^{\frac{1}{p}}\ \|u\|_{k,p,\lambda}$$

$$= (1+c_8\ M\ L^{\frac{1}{p}})\ \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}} = c_9\ \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}} ,$$

onde $c_9 = c_8\ M\ L^{\frac{1}{p}} + 1$.

(ii) $d(\Omega) \geq \rho > \bar{\rho}$.

Modificando a constante c_9 , a desigualdade (49) continua verdadeira para ρ tal que $d(\Omega) \geq \rho > \bar{\rho}$. De fato, tomando $\rho' = \frac{\bar{\rho}}{d(\Omega)} \cdot \rho$ teremos $\rho' \leq \bar{\rho}$ e por (i) vale (49) para ρ', isto é,

$$\left[\inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda} \left(\frac{\bar{\rho}}{d(\Omega)}\rho\right)^{\frac{\lambda}{p}}$$

$$= c_{10} \|u\|_{k,p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda}{p}} \quad ,$$

onde $c_{10} = c_9 \left(\frac{\bar{\rho}}{d(\Omega)}\right)^{\frac{\lambda}{p}} \leq c_9$.

Desta forma por (i) e (ii), para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos que

$$\left[\rho^{-\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda} \quad ,$$

e assim $|||u|||_{h,p,\lambda} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda}$. Logo se $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ segue que $u \in \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$, isto é, $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$, o que demonstra o lema.

Para terminar este parágrafo passemos a demonstrar o

<u>Teorema 2.2.2</u>: Seja Ω como nas hipóteses do lema 2.2.8. Sejam k um número inteiro não-negativo, p e λ dois números reais com $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < n$. Então $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) = L^{p,\lambda}(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: A demonstração da inclusão $L^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ não é difícil. De fato, basta observarmos que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$

$$\rho^{-\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P(x)|^p dx \leq \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p\, dx \quad ,$$

donde $|||u|||_{k,p,\lambda} \leq \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$, o que demonstra que $L^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$.

Suponhamos agora que $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$. Temos que

$$\left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P_k(x,x_0,\rho)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |P_k(x,x_0,\rho)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Da definição de $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ e do lema 2.2.6 tem-se

$$\left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-P_k(x,x_0,\rho)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq |||u|||_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}} \quad ,$$

e levando em conta que $P_k(x,x_0,\rho) = \sum_{0<|\alpha|\leq k} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha$, vem que

$$(50) \qquad \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq |||u|||_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} \left|\sum_{0<|\alpha|\leq k} \frac{a_\alpha(x_0,\rho)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

Fazendo $h = 0$ na demonstração do lema 2.2.9 obtemos que o segundo membro de (50) é majorado por $c_9 \|u\|_{k,p,\lambda}\ \rho^{\frac{\lambda}{p}}$, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Logo

$$\left[\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq c_9 \, \|u\|_{k,p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda}{p}} \, .$$

Portanto para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq c_9 \, \|u\|_{k,p,\lambda} \, ,$$

o que demonstra a inclusão $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) \subset L^{p,\lambda}(\Omega)$. Fica então demonstrado o teorema.

Corolário 2.2.1: $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = L^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demonstração: Basta tomar $k = 0$ no teorema anterior.

§3. ESPAÇOS $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ COMO ESPAÇOS DE FUNÇÕES HÖLDERIANAS

Iniciaremos este item definindo o espaço das funções hölderianas.

Definição: Seja u uma função real mensurável definida em Ω . Diremos que u é uma função hölderiana de expoente α , $0 < \alpha \leq 1$, se existe constante positiva k tal que para todo $x,y \in \Omega$ temos

$$|u(x) - u(y)| \leq k \, |x-y|^{\alpha} \, .$$

Denotaremos o espaço das funções hölderianas de expoente α por $\mathrm{Lip}(\alpha)$.

Estudaremos agora alguns resultados que nos auxiliarão na demonstração de que $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \mathrm{Lip}(\alpha)$, em quase toda parte com $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ e $n < \lambda \leq n+p$.

Observação 2: Fazendo $k = 0$ no lema 2.2.6 temos que para $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, para cada $x_0 \in \bar{\Omega}$ e cada $\rho \in (0,d(\Omega)]$ existe uma única constante, que denotaremos por $c(x_0,\rho,u)$ tal que

$$\inf \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p \, dx \leq \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c(x_0,\rho,u)|^p \, dx$$

Lema 2.3.1: Seja Ω tal que $|\Omega(x_0,\rho)| \geq A\,\rho^n$, para uma constante positiva A, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Seja $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\lambda > n$. Então existe uma constante positiva finita c_{11} tal que

$$|c(x_0,\rho,u) - c(x_0,\tfrac{\rho}{2^h},u)| \leq c_{11} \; |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ e h inteiro positivo.

Demonstração: Do lema 2.2.8 temos que existe uma constante positiva c_3 tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ e h inteiro não-negativo temos

$$|c(x_0,\rho,u) - c(x_0,\tfrac{\rho}{2^n},u)| \leq c_3 \; |||u|||_{p,\lambda} \sum_{i=0}^{h-1} 2^{i\frac{n-\lambda}{p}} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} .$$

Mas

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^{i\frac{n-\lambda}{p}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\frac{n-\lambda}{p}}$$

e como $\frac{n-\lambda}{p} < 0$ temos que $0 \leq 2^{\frac{n-\lambda}{p}} < 1$, e daí a série geométrica $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\frac{n-\lambda}{p}}$ é convergente e converge para $\frac{1}{1-2^{\frac{n-\lambda}{p}}}$.

Portanto

$$|c(x_0,\rho,u) - c(x_0,\tfrac{\rho}{2^h},u)| \leq c_3 \, |||u|||_{p,\lambda} \, \frac{1}{1-2^{\frac{n-\lambda}{p}}} \, \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$= c_{11} \, |||u|||_{p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

onde $c_{11} = \frac{c_3}{1-2^{\frac{n-\lambda}{p}}}$

cqd.

Lema 2.3.2: Sejam Ω nas condições do lema anterior e $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\lambda > n$. Então temos que $c(x,d(\Omega),u)$ é limitada em $\bar{\Omega}$.

Demonstração: Na demonstração do lema 2.2.9 vimos que $a_\alpha(x,d(\Omega))$ é limitada em $\bar{\Omega}$. Agora para α tal que $|\alpha| = 0$ temos $a_\alpha(x,d(\Omega)) = c(x,d(\Omega),u)$, donde se conclui que $c(x,d(\Omega),u)$ é limitada em $\bar{\Omega}$.

cqd.

Lema 2.3.3: Seja Ω nas condições do lema 2.2.1 e seja $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ e $\lambda > n$. Então para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, existe e é finito o limite $\lim_{\rho \to 0} c(x,\rho,u)$, que denotaremos por $\tilde{u}(x)$. Além disso $\tilde{u}(x)$ é uma função definida em $\bar{\Omega}$ que verifica a relação

$$|c(x,\rho,u)-\tilde{u}(x)| \leq c_{11} \; |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

para todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$.

Demonstração: Seja $x \in \bar{\Omega}$ e $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Sejam também h e ℓ dois números inteiros positivos. Podemos supor $\ell \geq h$. Fazendo $k = 0$, donde $|\alpha| = 0$, na demonstração do lema 2.2.8 obtemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c(x,\frac{\rho}{2^i},u)-c(x,\frac{\rho}{2^{i+1}},u)| \leq c_3 \; |||u|||_{k,p,\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\frac{n-\lambda}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

Agora como $n-\lambda < 0$, $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\frac{n-\lambda}{p}}$ é convergente e como $c_3 \; |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} < \infty$, segue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c(x,\frac{\rho}{2^i},u) - c(x,\frac{\rho}{2^{i+1}},u)|$$

é convergente, e por ser uma série de números reais é de Cauchy , isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $h,\ell \geq n_0$ temos

$$(50) \qquad \sum_{i=h}^{\ell} |c(x,\frac{\rho}{2^i},u) - c(x,\frac{\rho}{2^{i+1}},u)| < \varepsilon$$

Porém,

$$|c(x,\frac{\rho}{2^h},u)-c(x,\frac{\rho}{2^\ell},u)| \leq \sum_{i=h}^{\ell-1} |c(x,\frac{\rho}{2^i},u)-c(x,\frac{\rho}{2^{i+1}},u)|$$

e por (50) segue que a sucessão de números reais $\{c(x,\frac{\rho}{2^h},u)\}_{h=0}^{\infty}$ é de Cauchy e portanto convergente.

Vamos verificar agora que o limite da sucessão acima não depende de ρ. Sejam então $x \in \bar{\Omega}$ e ρ_1, ρ_2 dois reais positivos tais que $0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq d(\Omega)$. Como

$$|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u) - c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)|^p \leq$$

$$\leq 2^p|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u)-u(y)|^p + 2^p|c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)-u(y)|^p ,$$

temos, integrando ambos os membros da desigualdade sobre $\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h})$ em relação a y, que

$$(51) \qquad \int_{\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h})} |c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u) - c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)|^p\, dy \leq$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h})} |c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u)-u(y)|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h})} |c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)-u(y)|^p\, dy .$$

Visto que $\rho_1 \leq \rho_2$ temos $\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h}) \subset \Omega(x,\frac{\rho_2}{2^h})$ e daí

$$(52) \qquad \int_{\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h})} |c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)-u(y)|^p\, dy \leq \int_{\Omega(x,\frac{\rho_2}{2^h})} |c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)-u(y)|^p\, dy$$

Por outro lado

$$(53)\qquad \int_{\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h})} \left|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u) - c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)\right|^p dy =$$

$$= \left|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u) - c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)\right|^p \left|\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^h})\right|$$

$$\geq \left|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u) - c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)\right|^p A \left(\frac{\rho_1}{2^h}\right)^n$$

Deste modo substituindo (52) e (53) em (51) vem que

$$A \frac{\rho_1^{\,n}}{2^{hn}} \left|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u) - c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)\right|^p \leq$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x,\frac{\rho_1}{2^n})} \left|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u)-u(y)\right|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x,\frac{\rho_2}{2^h})} \left|c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)-u(y)\right|^p dy$$

$$\leq 2^p \,|||u|||^p_{p,\lambda} \left(\frac{\rho_1}{2^h}\right)^\lambda + 2^p \,|||u|||^p_{p,\lambda} \left(\frac{\rho_2}{2^h}\right)^\lambda .$$

Logo

$$\left|c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u)-c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)\right|^p \leq \frac{2^p}{2^{h\lambda}} \frac{2^{hn}}{\rho_1^{\,n} A} \,|||u|||^p_{p,\lambda} \,(\rho_1^{\,\lambda} + \rho_2^{\,\lambda})$$

$$= \frac{2^p}{A} \,|||u|||^p_{p,\lambda} \,\frac{\rho_1^{\,\lambda} + \rho_2^{\,\lambda}}{\rho_1^{\,n}} \,\frac{1}{2^{h(\lambda-n)}} ,$$

donde se conclui que

$$\lim_{h\to\infty} |c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u)-c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)| \leq \frac{2^p}{A} |||u|||^p_{p,\lambda} \frac{\rho_1^{\lambda}+\rho_2^{\lambda}}{\rho_1^{n}} \lim_{h\to\infty} \frac{1}{2^{h(\lambda-n)}} ,$$

e levando em conta que $\lim\limits_{h\to\infty} \frac{1}{2^{h(\lambda-n)}} = 0$, pois $\lambda-n > 0$, segue que $\lim\limits_{h\to\infty} c(x,\frac{\rho_1}{2^h},u) = \lim\limits_{h\to\infty} c(x,\frac{\rho_2}{2^h},u)$ ou seja, o limite da sucessão $\{c(x,\frac{\rho}{2^h},u)\}_{h=0}^{\infty}$ independe de ρ. Denotaremos $\lim\limits_{h\to\infty} c(x,\frac{\rho}{2^h},u) = \tilde{u}(x)$, para cada $x \in \bar{\Omega}$ e para $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Assim $\tilde{u}(x)$ é uma função definida em $\bar{\Omega}$.

Finalmente do lema 2.3.1 segue que

$$\lim_{h\to\infty} |c(x,\rho,u)-c(x,\frac{\rho}{2^h},u)| \leq c_{11} |||u|||_{p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} ,$$

ou seja

$$|c(x,\rho,u)-\tilde{u}(x)| \leq c_{11} |||u|||_{p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

e fazendo $\rho \to 0$ temos que $\lim\limits_{\rho\to 0} c(x,\rho,u) = \tilde{u}(x)$.

cqd.

<u>Teorema 2.3.1</u>: Seja Ω nas condições do lema 2.3.1. Sejam $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$, $\lambda > n$, e $\tilde{u}(x)$ a função definida no lema 2.3.3. Então $\tilde{u}(x)$ é limitada em $\bar{\Omega}$ e coincide para quase todo $x \in \Omega$ com a função $u(x)$.

<u>Demonstração</u>: Do lema 2.3.3, temos que

$$|c(x,d(\Omega),u)-\tilde{u}(x)| \leq c_{11} |||u|||_{p,\lambda} d(\Omega)^{\frac{\lambda-n}{p}} ,$$

donde

$$|\tilde{u}(x)| \leq c_{11} \, |||u|||_{p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} + |c(x,d(\Omega),u)| \quad .$$

Pelo lema 2.3.3, $c(x,d(\Omega),u)$ é limitada em $\bar{\Omega}$, e assim $\tilde{u}(x)$ também é limitada em $\bar{\Omega}$. Vamos verificar que $u(x) = \tilde{u}(x)$ para quase todo $x \in \Omega$. Temos que (ver [17], pg 11) que

$$(54) \qquad \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{m(\Omega(x,\rho))} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-u(x)|^p \, dx = 0 \quad ,$$

para quase todo $x \in \Omega$. Por outro lado,

$$(55) \qquad |c(x,\rho,u)-u(x)|^p \leq 2^p |c(x,\rho,u)-u(y)|^p + 2^p |u(y)-u(x)|^p \quad .$$

Integrando ambos os membros de (55) sobre $\Omega(x,\rho)$ em relação a y obtém-se

$$\int_{\Omega(x,\rho)} |c(x,\rho,u)-u(x)|^p \, dy \leq$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x,\rho)} |c(x,\rho,u)-u(y)|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-u(x)|^p dy \quad ,$$

e segue que

$$(56) \qquad |c(x,\rho,u) - u(x)|^p \, |\Omega(x,\rho)| \leq$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x,\rho)} |c(x,\rho,u)-u(y)|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-u(x)|^p dy \quad .$$

Por hipótese $|\Omega(x,\rho)| \geq A \rho^n$ e levando em conta - que $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, temos de (56) que

$$(57) \qquad |c(x,\rho,u) - u(x)|^p \le$$

$$\le \frac{2^p}{A\rho^n} |||u|||^p_{p,\lambda} \, \rho^\lambda + \frac{2^p}{|\Omega(x,\rho)|} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-u(x)|^p \, dy$$

$$= \frac{2^p}{A} |||u|||^p_{p,\lambda} \, \rho^{\lambda-n} + \frac{2^p}{|\Omega(x,\rho)|} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-u(x)|^p \, dy \quad .$$

Tomando o limite em ambos os membros de (57) para $\rho \to 0$ ficamos com

$$\lim_{\rho\to 0} |c(x,\rho,u) - u(x)|^p \le$$

$$\le \frac{2^p}{A} |||u|||^p_{p,\lambda} \lim_{\rho\to 0} \rho^{\lambda-n} + 2^p \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{|\Omega(x,\rho)|} \int_{\Omega(x,\rho)} |u(y)-u(x)|^p \, dy$$

Por (54) e como $\lambda-n > 0$ temos que

$$\lim |c(x,\rho,u) - u(x)| = 0$$

para quase todo $x \in \Omega$, ou seja $\tilde{u}(x) = u(x)$ para quase todo $x \in \Omega$.

cqd.

<u>Lema 2.3.4</u>: Seja Ω nas condições do lema 2.3.1. Seja $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$, com $1 \le p < \infty$ e $\lambda > 0$. Então para todo $x_0, y_0 \in \bar{\Omega}$ tal que $|x_0-y_0| \le \frac{d(\Omega)}{2}$ a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\left| c(x_0, 2|x_0-y_0|, u) - c(y_0, 2|x_0-y_0|, u) \right| \le$$

$$\le \left[\frac{2^{p+1+\lambda}}{A}\right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{p,\lambda} \, |x_0-y_0|^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

Demonstração: Coloquemos $\rho = |x_0 - y_0| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$ e $S = S(x_0, 2\rho) \cap S(y_0, 2\rho) \cap \Omega$. Para todo $y \in S$ temos

$$|c(x_0,2\rho,u) - c(y_0,2\rho,u)|^p \leq$$

$$\leq 2^p |c(x_0,2\rho,u) - u(y)|^p + 2^p |c(y_0,2\rho,u) - u(y)|^p .$$

Então

$$\int_S |c(x_0,2\rho,u) - c(y_0,2\rho,u)|^p \, dy \leq$$

$$\leq 2^p \int_S |c(x_0,2\rho,u) - u(y)|^p dy + 2^p \int_S |c(y_0,2\rho,u) - u(y)|^p dy$$

$$\leq 2^p \int_{\Omega(x_0,2\rho)} |c(x_0,2\rho,u) - u(y)|^p dy + 2^p \int_{\Omega(y_0,2\rho)} |c(y_0,2\rho,u) - u(y)|^p dy$$

$$\leq 2^p \, |||u|||_{p,\lambda}^p \, (2\rho)^\lambda + 2^p \, |||u|||_{p,\lambda}^p \, (2\rho)^\lambda$$

$$= 2^{p+1+\lambda} \, |||u|||_{p,\lambda}^p \, \rho^\lambda .$$

Por outro lado, $|S| \geq |\Omega(x_0, \rho)| \geq A \rho^n$ e daí

$$A\rho^n \, |c(x_0,2\rho,u) - c(y_0,2\rho,u)|^p \leq 2^{p+1+\lambda} \, |||u|||_{p,\lambda}^p \, \rho^\lambda ,$$

logo

$$|c(x_0,2\rho,u) - c(y_0,2\rho,u)| \leq \left[\frac{2^{p+1+\lambda}}{A}\right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{p,\lambda} \, \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} ,$$

o que demonstra o lema.

Teorema 2.3.2: Seja Ω conexo nas condições do lema 2.3.1 e $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ com $1 \leq p < n$ e $n < \lambda \leq n+p$. Então temos que $\tilde{u}(x)$ é hölderiana em $\bar{\Omega}$ com expoente $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ e para todo $x,y \in \bar{\Omega}$ temos a majoração

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq c|||u|||_{p,\lambda} \; |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

<u>Demonstração</u>: Sejam $x,y \in \bar{\Omega}$ tal que $\rho = |x-y| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$. Temos que

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq$$

$$\leq |\tilde{u}(x)-c(x,2\rho,u)|+|\tilde{u}(y)-c(y,2\rho,u)|+|c(x,2\rho,u)-c(y,2\rho,u)|$$

Pelo lema 2.3.3

$$|\tilde{u}(x)-c(x,2\rho,u)| \leq c_1 |||u|||_{p,\lambda} \; (2\rho)^{\frac{\lambda-n}{p}} = c_1 \; 2^{\frac{\lambda-n}{p}} \; |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

e

$$|\tilde{u}(y)-c(y,2\rho,u)| \leq c_1 \; 2^{\frac{\lambda-n}{p}} \; |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} \quad .$$

Do lema 2.3.4 segue que

$$|c(x,2\rho,u)-c(y,2\rho,u)| \leq \left[\frac{2^{p+1+\lambda}}{A}\right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} \quad .$$

Desta forma

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \tag{58}$$

$$\leq 2 \; c_{11} \; 2^{\frac{\lambda-n}{p}} \; |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} + \left[\frac{2^{p+1+\lambda}}{A}\right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$= \left\{ 2 \; c_{11} \; 2^{\frac{\lambda-n}{p}} + \left[\frac{2^{p+1+\lambda}}{A}\right]^{\frac{1}{p}} \right\} |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$= c_{12} \; |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

onde $\quad c_{12} = 2\, c_{11}\, 2^{\frac{\lambda-n}{p}} + \left[\dfrac{2^{p+1+\lambda}}{A}\right]^{\frac{1}{p}}$.

Agora, se $x,y \in \bar{\Omega}$ são tais que $|x-y| > \frac{d(\Omega)}{2}$, como Ω é convexo e $\bar{\Omega}$ é compacto, podemos construir uma poligonal com vértices em $\bar{\Omega}$, de extremos x e y, de tal modo que os segmentos da poligonal tenham comprimento menores que $\frac{d(\Omega)}{2}$ e a quantidade desses segmentos é majorada por uma constante k que depende somente de $d(\Omega)$.

Seja $P = \cup\{[x_i, x_{i+1}] : x_i \in \bar{\Omega},\ i = 0,1,\ldots,r-1\}$ a poligonal que liga x e y, isto é, $x_0 = x$, $x_r = y$ e $|x_{i+1}-x_i| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$ para todo $i = 0,1,\ldots,r-1$.

Agora

$$|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)| = \Big|\sum_{i=0}^{r-1} \tilde{u}(x_{i+1})-\tilde{u}(x_i)\Big| \leq \sum_{i=0}^{r-1} |\tilde{u}(x_{i+1})-\tilde{u}(x_i)| \;.$$

Como $|x_{i+1}-x_i| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$ para todo $i = 0,1,\ldots,r-1$, de (58) vem que

$$|\tilde{u}(x_{i+1})-\tilde{u}(x_i)| \leq c_{12} \; |||u|||_{p,\lambda} \; |x_{i+1}-x_i|^{\frac{\lambda-n}{p}} \;,$$

donde

$$|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)| \leq \sum_{i=0}^{r-1} c_{12} \; |||u|||_{p,\lambda} \; |x_{i+1}-x_i|^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$= c_{12} \; |||u|||_{p,\lambda} \sum_{i=0}^{r-1} |x_{i+1}-x_i|^{\frac{\lambda-n}{p}} \;.$$

Agora $|x-y| > \frac{d(\Omega)}{2} > |x_{i+1}-x_i|$ para todo $i = 0,1,\ldots,r-1$ e portanto

$$|\tilde{u}(x)-\tilde{u}(y)| \leq c_{12} \, |||u|||_{p,\lambda} \sum_{i=0}^{r-1} |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$= c_{12} \, |||u|||_{p,\lambda} \, r\,|x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$\leq c_{12} \, |||u|||_{p,\lambda} \, k\,|x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$= c_{13} \, |||u|||_{p,\lambda} \, |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}} \quad ,$$

onde $c_{13} = c_{12}\, k$.

cqd.

Teorema 2.3.3: Se $u(x)$ é uma função real hölderiana com expoente $0 < \alpha = \frac{\lambda-n}{p} \leq 1$, temos que $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Demonstração: Por hipótese temos que existe uma constante $k > 0$ tal que para todo $x,y \in \Omega$ temos

$$|u(x)-u(y)| \leq k\,|x-y|^{\alpha} \quad .$$

Como u é uma função com valores reais temos que para $y \in \Omega(x_0,\rho)$

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-c|^p dx \leq \int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x)-u(y)|^p dx$$

$$\leq \int_{\Omega(x_0,\rho)} k\,|x-y|^{\alpha p}\, dx \leq k \int_{\Omega(x_0,\rho)} \rho^{\alpha p}\, dx$$

$$= k\,\rho^{\lambda-n}\,|\Omega(x_0,\rho)| \le k\,\rho^{\lambda-n}\,k_1\,\rho^n$$

$$= k\,k_1\,\rho^{\lambda} = M\,\rho^{\lambda}$$

para alguma constante k_1 e com $M = k\,k_1$. Com isto fica demonstrado que $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$.

Corolário 2.3.1: Se $n < \lambda \le n+p$, $1 \le p < 0$ temos que $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ coincide em quase toda parte com o espaço das funções hölderianas de expoente $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$.

Demonstração: Teoremas 2.3.2 e 2.3.3.

Corolário 2.3.2: Se $\lambda > n+p$ e $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ então u é constante em quase toda parte.

Demonstração: Se $\lambda > n+p$ então $\alpha = \frac{\lambda-n}{p} > 1$ e então as funções hölderianas de expoente α são constantes, donde pelo corolário 2.3.1, as funções de $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ são constantes em quase toda parte.

CAPÍTULO III

TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO

Apresentaremos neste capítulo teoremas de interpolação envolvendo espaços do tipo $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Para isso introduziremos inicialmente os espaços B.M.O. de John-Nirenberg e os espaços $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}$ que vão desempenhar nos teoremas de interpolação envolvendo os $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, o mesmo papel que os espaços de Marcinkiewics L_*^p desempenham nos teoremas de interpolação envolvendo os espaços L^p . Para maiores detalhes sobre esses espaços ver [5] e [18].

§1. FUNÇÕES DE OSCILAÇÃO MÉDIA LIMITADA (BMO)

<u>Definição 3.1.1</u>: Seja u uma função localmente integrável em $\mathbb{R}^n$. Diremos que u pertence ao espaço BMO se

$$\sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_S |u(x)-m_Q(u)|dx = \|u\|_{BMO} < \infty \tag{59}$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos finitos Q do $\mathbb{R}^n$.

A classe das funções de oscilação média limitada, módulo constante, é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{BMO}$ definida em (59). (ver [10] e [11]).

O nosso propósito neste parágrafo é demonstrar que BMO = $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Para isto demonstraremos primeiramente os seguintes lemas:

<u>Lema 3.1.1</u>: (Decomposição) Seja u uma função definida em Q_0 , integrável e seja s um número positivo tal que

$$s \geq \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |u(x)|\, dx \quad .$$

Então existe uma quantidade enumerável de cubos abertos disjuntos I_k em Q_0 tal que

(i) $|u(x)| \leq s$ para quase todo (p.q.t) $x \in Q_0 \setminus \cup_k I_k$.

(ii) $|m_{I_k}(u)| \leq 2^n s$.

(iii) $\sum_k |I_k| \leq \frac{1}{s} \int_{Q_0} |u(x)|\, dx$.

<u>Demonstração</u>: Primeiramente subdividimos Q_0 em 2^n cubos iguais. Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_{2^n}$ os cubos dessa subdivisão, e sejam $I_{11}, I_{12}, \ldots, I_{1t}$, com $t \leq 2^n$, os cubos abertos para os quais o valor médio de $|u|$ é maior ou igual a s . Assim $m(I_j) = m(I_{1k})$ para todo $j = 1,2,\ldots,2^n$ e todo $k = 1,2,\ldots,t$, donde

$$|Q_0| = \sum_{j=1}^{2^n} |I_j| = \sum_{j=1}^{2^n} |I_{1k}| = 2^n |I_{1k}| \quad .$$

Logo usando a hipótese do lema e a igualdade acima temos que

$$\int_{I_{1k}} |u(x)|dx \leq \int_{Q_0} |u(x)|dx \leq s|Q_0| \leq s2^n |I_{1k}| \tag{60}$$

Da escolha dos I_{1k} vem que

$$s \leq \frac{1}{|I_{1k}|} \int_{I_{1k}} |u(x)|\, dx \quad . \tag{61}$$

Desta forma, de (60) e (61) segue que

$$s|I_{1k}| \leq \int_{I_{1k}} |u(x)|dx \leq 2^n s|I_{1k}| .$$

Agora subdividimos cada um dos cubos restantes, sobre os quais o valor médio de $|u|$ é menor do que s, em 2^n cubos iguais e denotemos por $I_{21},\ldots,I_{2r}$, com $r \leq 2^n$, os cubos abertos dessa subdivisão sobre os quais o valor médio de $|u|$ é maior ou igual a s. Usando o mesmo raciocínio anterior temos que

$$s|I_{2k}| \leq \int_{I_{2k}} |u(x)|dx \leq 2^n s|I_{2k}| .$$

Continuamos subdividindo até que os subcubos sobre os quais o valor médio de $|u|$ é menor que s, tenham tamanhos arbitrariamente pequenos. Logo obtivemos uma sequência de cubos abertos disjuntos $\{I_{jk}\}$ que denotaremos por $\{I_k\}$ tal que

(62) $$s|I_k| \leq \int_{I_k} |u(x)|dx \leq 2^n s|I_k| .$$

Usando a definição de $m_{I_k}(u)$ e (62) obtemos

$$|m_{I_k}(u)| \leq \frac{1}{|I_k|} \int |u(x)|dx \leq 2^n s$$

demonstrando (ii).

Novamente usando (62) segue que

$$\sum_k s|I_k| \leq \sum_k \int_{I_k} |u(x)|dx = \int_{\bigcup_k I_k} |u(x)|dx \leq \int_{Q_0} |u(x)|dx ,$$

donde

$$\sum_k |I_k| \leq \frac{1}{s} \int_{Q_0} |u(x)|dx ,$$

o que demonstra (iii). Finalmente, para demonstrarmos (i) notemos que $F = \{x \in Q_0 \setminus \bigcup_k I_k : |u(x)| > s\} = \emptyset$. De fato, se $x \in Q_0 \setminus \bigcup_k I_k$ então x pertence a algum subcubo I , sobre o qual o valor médio de $|u|$ é menor que s . Assim se $x \in F$, teríamos

$$\frac{1}{|I|} \int_I |u(x)|dx > \frac{1}{|I|} \int_I s\,dx = s ,$$

o que é um absurdo. Portanto $F = \emptyset$ e então $|F| = 0$, ou seja $|u(x)| \leq s$ p.q.t. $x \in Q_0 \setminus \bigcup I_k$. Fica então demonstrado (i) e consequentemente o lema.

<u>Lema 3.1.2:</u> Seja $u \in BMO$. Então se $S_\sigma = \{x \in Q : |u(x)-m_Q(u)| > \sigma\}$, onde Q é um cubo finito de $\mathbb{R}^n$, temos que

$$|S_\sigma| \leq \left(\frac{B}{\|u\|_{BMO}} \int_Q |u(x)-m_Q(u)|dx \right) . e^{-\frac{\alpha\sigma}{\|u\|_{BMO}}}$$

para $\sigma \geq a\|u\|_{BMO}$, onde $B \leq 1$, α são constantes positivas dependendo só de n , e a é uma constante a ser determinada. Além disso para $\sigma > 0$ temos

$$(63) \qquad |S_\sigma| \leq B\, e^{-\frac{\alpha\sigma}{\|u\|_{BMO}}} |Q|$$

Demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que $m_Q(u) = 0$ e $\|u\|_{BMO} = 1$, trocando u por $\dfrac{u(x)-m_Q(u)}{\|u\|_{BMO}}$.

Levando em conta que $\{x \in Q : |u(x)| > \sigma\} \subset Q$ temos que

$$\int_Q |u(x)|dx \geq \int_{S_\sigma} |u(x)|dx \geq \int_{S_\sigma} \sigma \, dx = \sigma \, |S_\sigma|$$

donde $|S_\sigma| \leq \frac{1}{\sigma} \int_Q |u(x)|dx$. Seja $F(\sigma)$ o menor número que satisfaz a desigualdade

$$(64) \qquad |S_\sigma| \leq F(\sigma) \int_Q |u(x)|dx \, .$$

Da escolha de $F(\sigma)$ vem que $F(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma}$. Vamos provar a seguir que para $\sigma \geq 2^n$ temos

$$(65) \qquad F(\sigma) \leq \frac{1}{s} F(\sigma - 2^n s) \quad ,$$

para $2^{-n}\sigma \geq s \geq 1$. Para este fim utilizamos o lema 3.1.1 com

$$2^{-n}\sigma \geq s \geq 1 \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x)|dx$$

Pela parte (i) do lema 3.1.1 temos que se x é tal que $|u(x)| > \sigma$, então $x \in I_k$ para algum k e por (ii) $|m_{I_k}(u)| \leq 2^n s$. Assim

$$\{x \in Q : |u(x)| > \sigma\} \subset \bigcup_k \{x \in I_k : |u(x) - m_{I_k}(u)| > \sigma - 2^n s\} \, ,$$

pois se $|u(x)| > \sigma$, então $x \in I_k$ para algum k e

$$|u(x)-m_{I_k}(u)| \geq |u(x)|-|m_{I_k}(u)| \geq \sigma-2^n s \quad .$$

Logo

(66) $$|\{x \in Q : |u(x)| > \sigma\}| \leq$$

$$\leq \sum_k |\{x \in I_k : |u(x)-m_{I_k}(u)| > \sigma-2^n s\}|$$

Agora, no cubo I_k a função $u-m_{I_k}(u)$ satisfaz as hipóteses do lema, isto é,

(67) $$\frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |u(x)-m_{I_k}(u)|dx \leq 1 \quad .$$

Então pela definição de $F(\sigma)$ e por (67) segue que

$$|\{x \in I_k : |u(x)-m_{I_k}(u)| > \sigma-2^n s\}| \leq$$

$$\leq F(\sigma-2^n s) \int_{I_k} |u(x)-m_{I_k}(u)|dx \leq F(\sigma-2^n s) \; |I_k|$$

Desta forma, por (66) e por (iii) do lema 3.1.1 vem que

$$|S_\sigma| \leq \sum_k F(\sigma-2^n s) \; |I_k| \leq \frac{1}{s} F(\sigma-2^n s) \int_Q |u(x)|dx \quad ,$$

donde pela escolha de $F(\sigma)$ temos que

$$F(\sigma) \leq \frac{1}{s} F(\sigma-2^n s) \quad .$$

Fazendo alguns cálculos obtemos

(68) $$F(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{12}{10} 2^{-n} e^{-2\sigma}$$

para $\frac{2^n e}{e-1} \leq \sigma \leq \frac{2^n e}{e-1} + 2^n e$ e $\alpha = \frac{1}{2^n e}$. Por outro lado fazendo $s = e$ em (65) e utilizando (68) vem que

$$F(\sigma+2^n e) \leq \frac{1}{e} F(\sigma+2^n e-2^n e) = \frac{1}{e} F(\sigma)$$

$$\leq \frac{12}{10} 2^{-n} e^{-1} e^{-\alpha\sigma} = \frac{12}{10} 2^{-n} e^{-\alpha(\sigma+2^n e)}$$

Isto nos mostra que se (68) vale para σ pertencente a um intervalo de comprimento $2^n e$, então (68) vale para todo σ maior, ou seja

(69) $$F(\sigma) \leq B e^{-\alpha\sigma}$$

para $\sigma \geq a$, onde $B = \frac{12}{10} 2^{-n}$ e $a = \frac{2^n e}{e-1}$.

Agora, substituindo (69) em (64) temos que

$$|S_\sigma| \leq \left(B \int_Q |u(x)|dx \right) e^{-\alpha\sigma}$$

para $\sigma \geq a$. Trocando $u(x)$ por $\frac{u(x)-m_Q(u)}{\|u\|_{BMO}}$, segue que

(70) $$|S_\sigma| \leq \left(\frac{B}{\|u\|_{BMO}} \int_Q |u(x)-m_Q(u)|dx \right) e^{-\frac{\alpha\sigma}{\|u\|_{BMO}}}$$

para $\sigma \geq a\|u\|_{BMO}$.

Finalmente utilizando a hipótese e (70) concluímos que

$$|S_\sigma| \leq B e^{-\frac{\alpha\sigma}{\|u\|_{BMO}}} |Q| .$$

Fica então demonstrado o lema.

Estamos agora em condições de demonstrar que os espaços BMO, introduzidos por John-Nirenberg são espaços do tipo $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, para $\lambda = n$.

Teorema 3.1.1: $BMO = \mathcal{L}^{p,n}$.

Demonstração: Basta demonstrarmos que

$$\|u\|_{p,n} \leq k\|u\|_{BMO} \leq k\|u\|_{p,n} . \tag{71}$$

Primeiramente notemos que se $u \in BMO$ e Q é um cubo finito qualquer do $\mathbb{R}^n$, temos por (63) que

$$\int_Q |u(x)-m_Q(u)|^p dx = p \int_0^\infty \sigma^{p-1} |S_\sigma| \, d\sigma$$

$$\leq p \int_0^\infty \sigma^{p-1} B \, e^{-\frac{\alpha\sigma}{\|u\|_{BMO}}} |Q| \, d\sigma .$$

Fazendo $\xi = \dfrac{\alpha\sigma}{\|u\|_{BMO}}$ temos $d\sigma = \dfrac{\|u\|_{BMO}}{\alpha} d\xi$, logo

$$\int_Q |u(x)-m_Q(u)|^p dx \leq pB|Q| \int_0^\infty \left(\frac{\|u\|_{BMO}}{\alpha}\right)^{p-1} \xi^{p-1} \, e^{-\xi} \frac{\|u\|_{BMO}}{\alpha} d\xi$$

$$= \frac{pB}{\alpha^p} |Q| \, \|u\|_{BMO}^p \int_0^\infty \xi^{p-1} \, e^{-\xi} \, d\xi$$

$$= \frac{pB}{\alpha^p} |Q| \, \|u\|_{BMO} \Gamma(\xi) ,$$

onde por $\Gamma(\xi)$ representamos a função gama que é convergente, então

$$\int_Q |u(x)-m_Q(u)|^p \, dx \leq k^p \, |Q| \, \|u\|^p_{BMO} \quad ,$$

onde $k^p = \frac{pB}{\alpha^p}\Gamma(\xi)$. Desta forma

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x)-m_Q(u)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq k \, \|u\|_{BMO} \quad ,$$

donde se conclui que

$$\|u\|_{p,n} \leq k \, \|u\|_{BMO}$$

Por outro lado, se $u \in \mathcal{L}^{p,n}$, da desigualdade de Hölder temos

$$\int_Q |u(x)-m_Q|dx \leq \left(\int_Q dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_Q |u(x)-m_Q(u)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= |Q|^{\frac{1}{p'}} \, |Q|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x)-m_Q(u)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq |Q| \, \|u\|_{p,n} \quad ,$$

e então

$$\|u\|_{BMO} \leq \|u\|_{p,n}$$

Fica então demonstrado (71) e consequentemente o teorema.

§2. ESPAÇOS $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}$

Para definirmos estes espaços precisamos da definição e de algumas propriedades dos espaços de Marcinkiewics L_*^p (ver por exemplo [5] e [18]) .

Definição 3.2.1: Seja u uma função real mensurável em Ω . Diremos que u pertence a $L_*^p(\Omega)$, com $1 \leq p \leq \infty$, se existe constante $c > 0$ tal que

$$\sigma^p \,|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| \leq c^p ,$$

para todo $\sigma > 0$.

Para $u \in L_*^p(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{L_*^p(\Omega)} = \sup_{\sigma \to 0} \sigma(|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}}$$

Lema 3.2.1: $\|\cdot\|_{L_*^p(\Omega)}$ é uma quase-norma.

Demonstração: Devemos mostrar que

(i) $\|u\|_{L_*^p(\Omega)} \geq 0$ e $\|u\|_{L_*^p(\Omega)} = 0$ se e somente se $u = 0$.

(ii) $\|au\|_{L_*^p(\Omega)} = |a| \; \|u\|_{L_*^p(\Omega)}$.

(iii) $\|u+v\|_{L_*^p(\Omega)} \leq k(\|u\|_{L_*^p(\Omega)} + \|v\|_{L_*^p(\Omega)})$, com $k > 1$.

Provemos (i): Como $|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| \geq 0$ temos que $\|u\|_{L_*^p(\Omega)} \geq 0$. Suponhamos que $u = 0$. Então para todo $\sigma > 0$,

$\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\} = \emptyset$, logo $\|u\|_{L^p_*(\Omega)} = 0$. Por outro lado se $\|u\|_{L^p_*(\Omega)} = 0$, temos que $\sigma(|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|^{\frac{1}{p}} = 0$ para todo $\sigma > 0$, e daí $|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| = 0$ para todo $\sigma > 0$. Assim $|u(x)| \leq \sigma$ q.t.p. para todo $\sigma > 0$. Então tomando $\sigma = \frac{1}{j}$ com $j \in \mathbb{N}$ vem que $|u(x)| \leq \frac{1}{j}$ q.t.p. para todo $j \in \mathbb{N}$, isto é, $u = 0$. Com isso provamos (i).

Provemos (ii): Temos para todo $\sigma > 0$ que

(72) $$\|au\|_{L^p_*(\Omega)} = \sup_{\sigma>0} \sigma(|\{x \in \Omega : |au(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geq \sigma(|\{x \in \Omega : |au(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}}$$

Como (72) vale para todo $\sigma > 0$, vale também para $|a|\sigma$. Assim para todo $\sigma > 0$ vem que

$$\|au\|_{L^p_*(\Omega)} \geq |a| \; \sigma(|\{x \in \Omega : |a| \; |u(x)| > |a|\sigma\}|)^{\frac{1}{p}}$$
$$= |a| \; \sigma(|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} .$$

Assim $\frac{1}{|a|} \|au\|_{L^p_*(\Omega)}$ é um limitante superior para o conjunto $\{\sigma(|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} : \sigma > 0\}$. Então

$$\frac{1}{|a|} \|au\|_{L^p_*(\Omega)} \geq \|u\|_{L^p_*(\Omega)} ,$$

ou seja

(73) $$\|au\|_{L^p_*(\Omega)} \geq |a| \; \|u\|_{L^p_*(\Omega)} .$$

De maneira análoga, considerando $\frac{\sigma}{|a|}$ ao invés de $|a|\sigma$, mostramos que

(74) $$\|au\|_{L^p_*(\Omega)} \leq |a| \; \|u\|_{L^p_*(\Omega)} .$$

De (73) e (74) concluímos que $\|au\|_{L^p_*(\Omega)} = |a| \; \|u\|_{L^p_*(\Omega)}$ provando (ii).

Para demonstrarmos (iii) notemos primeiramente que para todo $\sigma > 0$

$$\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\} \subset \{x \in \Omega : 2|u(x)| > \sigma\} \cup \{x \in \Omega : 2|v(x)| > \sigma\} \quad ,$$

assim

$$|\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}| \leq$$
$$\leq |\{x \in \Omega : 2|u(x)| > \sigma\}| + |\{x \in \Omega : 2|v(x)| > \sigma\}| .$$

Usando a desigualdade $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leq a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}$, vem que

$$\sigma(|\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}|^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq \sigma(|\{x \in \Omega : 2|u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} + \sigma(|\{x \in \Omega : 2|v(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \|2u\|_{L^p_*(\Omega)} + \|2v\|_{L^p_*(\Omega)}$$
$$= 2\;(\|u\|_{L^p_*(\Omega)} + \|v\|_{L^p_*(\Omega)}) \quad .$$

Deste modo $\|u+v\|_{L^p_*(\Omega)} \leq 2(\|u\|_{L^p_*(\Omega)} + \|v\|_{L^p_*(\Omega)})$, o que demonstra (iii) e o lema.

<u>Observação 3</u>: O espaço $L_*^p(\Omega)$ torna-se um espaço normado quando para $u \in L_*^p(\Omega)$ definimos

$$\|u\|_{\tilde{L}_*^p(\Omega)} = \sup_{F \subset \Omega} |F|^{-\frac{1}{p'}} \int_F |u(x)|\, dx$$

e além disso temos

$$(75) \qquad \|u\|_{L_*^p(\Omega)} \leq \|u\|_{\tilde{L}_*^p(\Omega)} \leq p' \|u\|_{L_*^p(\Omega)} ,$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. (Ver [5]) .

<u>Lema 3.2.2</u>: Se $u,v \in L_*^p(\Omega)$ então $u+v \in L_*^p(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Temos que para todo $\sigma > 0$,

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}| \leq$$
$$\leq \sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \tfrac{\sigma}{2}\}| + \sigma^p |\{x \in \Omega : |v(x)| > \tfrac{\sigma}{2}\}| .$$

Agora se $u,v \in L_*^p(\Omega)$, existem constantes positivas c_1, c_2 tais que para todo $\sigma > 0$

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \tfrac{\sigma}{2}\}| \leq c_1$$

e

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |v(x)| > \tfrac{\sigma}{2}\}| \leq c_2 .$$

Portanto existe constante $c = c_1+c_2 > 0$ tal que para todo $\sigma > 0$

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}| \leq c ,$$

isto é, $u+v \in L^p_*(\Omega)$.

Lema 3.2.3: O espaço $L^p(\Omega)$ está continuamente imerso em $L^p_*(\Omega)$.

Demonstração: Para todo $\sigma > 0$ vem que

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| = \int_{\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}} \sigma^p \, dx \le \int_{\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}} |u(x)|^p \, dx \le \int_\Omega |u(x)|^p \, dx ,$$

e então $\|u\|_{L^p_*(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}$, o que demonstra o lema.

Estamos agora em condições de definir os espaços - $\mathcal{L}^{p,\lambda}_*(\Omega)$.

Definição 3.2.2: Seja u uma função real mensurável em Ω . Diremos que u pertence a $\mathcal{L}^{p,\lambda}_*(\Omega)$ se existe constante positiva c tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos

$$\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p_*(\Omega(x_0,\rho))} \le c\,\rho^{\frac{\lambda}{p}} .$$

Lema 3.2.4: Seja $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}_*(\Omega)$. Então

$$\|u\|_* = \inf\{c : \|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p_*(\ (x_0,\ ))} \le c\,\rho^{\frac{\lambda}{p}}\}$$

é uma quase-norma em $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Temos que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$,

(76) $$\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(x)\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq \|u\|_* \rho^{\frac{\lambda}{p}} ,$$

então $\|u\|_* \geq 0$. Se $\|u\|_* = 0$ então por (76)

$$\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))} = 0$$

para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$, donde $u = 0$.

Por outro lado se $u = 0$, temos que $m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) = 0$ e então $\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))} = 0$, donde $\|u\|_* = 0$.

Temos ainda que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$

$$|a| \; \|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq |a| \; \|u\|_* \rho^{\frac{\lambda}{p}} .$$

Desta forma para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$

$$\|au-am_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq |a| \; \|u\|_* \rho^{\frac{\lambda}{p}} ,$$

o que implica que $\|au\|_* \leq |a| \; \|u\|_*$. Do mesmo modo, vemos que $\|au\|_* \geq |a| \; \|u\|_*$, o que mostra que $\|au\|_* = |a| \; \|u\|_*$.

Finalmente, temos que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$

$$\|u+v - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u+v)\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))} =$$

$$= \|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) + v-m_{\Omega(x_0,\rho)}(v)\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$\leq 2\left(\|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} + \|v-m_{\Omega(x_0,\rho)}(v)\|_{L_*^p(\Omega(x_0,\rho))}\right)$$

$$\leq 2\left(\|u\|_* \ \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \|v\|_* \ \rho^{\frac{\lambda}{p}}\right)$$

$$= 2(\|u\|_* + \|v\|_*) \ \rho^{\frac{\lambda}{p}} \quad ,$$

donde, $\|u+v\|_* \leq 2(\|u\|_* + \|v\|_*)$ o que demonstra o lema.

<u>Lema 3.2.5</u>: Se $p > 1$, temos que

$$\|u\|_{\tilde{*}} = \inf \{c : \|u-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L_{\tilde{*}}^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq$$

$$\leq c \ \rho^{\frac{\lambda}{p}} \ , \text{ para todo } x_0 \in \bar{\Omega} \text{ e todo } \rho \in (0,d(\Omega)] \}$$

é uma norma em $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}(\Omega)$ e além disso

$$\|u\|_* \leq \|u\|_{\tilde{*}} \leq p' \ \|u\|_* \quad .$$

<u>Demonstração</u>: Levando em conta a observação 3, a demonstração é análoga à demonstração do lema 3.2.4.

<u>Teorema 3.2.1</u>: $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ está continuamente imerso em $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Em primeiro lugar temos que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ e todo $\sigma > 0$

$$\left(\int_{\Omega(x_0,\rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq$$

$$\geq \left(\int_{\{x \in \Omega(x_0,\rho) \;:\; |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\}} |u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\geq \left(\int_{\{x \in \Omega(x_0,\rho) \;:\; |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\}} \sigma^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \sigma (| \{x \in \Omega(x_0,\rho) \;:\; |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\} |)^{\frac{1}{p}}$$

Assim para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0, d(\Omega)]$ vem que

$$(77) \qquad \|u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p_*(\Omega(x_0,\rho))} \leq \|u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

Multiplicando ambos os membros de (77) por $\rho^{-\frac{\lambda}{p}}$ temos que

$$\rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p_*(\Omega(x_0,\rho))} \leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))}$$

$$\leq |||u|||_{p,\lambda} \; ,$$

e portanto para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\|u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p_*(\Omega(x_0,\rho))} \leq |||u|||_{p,\lambda} \; \rho^{\frac{\lambda}{p}} \; ,$$

isto é, $\|u\|_* \leq |||u|||_{p,\lambda}$, o que demonstra o teorema.

<u>Lema 3.2.6</u>: $L^p_*(\Omega) = \mathcal{L}^{p,0}_*(\Omega)$.

<u>Demonstração</u>: Seja $u \in L^p_*(\Omega)$. Provemos que $m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) \in L^p_*(\Omega)$ para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Para isto notemos que

$$\{x \in \Omega : |m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\} \subset \{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\} .$$

Assim

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\}| \leq \sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| \leq c^p ,$$

donde $m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) \in L^p_*(\Omega)$. Então pelo lema 3.2.2, segue que $u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u) \in L^p_*(\Omega)$ para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$. Então da definição de $L^p_*(\Omega)$, vem que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ e todo $\sigma > 0$

$$\sigma^p (\{ x \in \Omega : |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\}| \leq c^p$$

Mas

$$\sigma^p |\{x \in \Omega(x_0,\rho) : |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\}| \leq$$
$$\leq \sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x) - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\}| \leq c^p ,$$

donde $\|u - m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)\|_{L^p_*(\Omega(x_0,\rho))} \leq c\, \rho^{\frac{0}{p}}$, para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$, e então $u \in \mathcal{L}^{p,0}_*(\Omega)$, demonstrando que $L^p_*(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,0}_*(\Omega)$.

Provemos a inclusão $\mathcal{L}^{p,0}_*(\Omega) \subset L^p_*(\Omega)$. Seja $u \in \mathcal{L}^{p,0}_*(\Omega)$, então para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$, todo $\rho \in (0,d(\Omega)]$ e todo $\sigma > 0$

$$\sigma\left(\left|\{x \in \Omega(x_0,\rho) : |u(x)-m_{\Omega(x_0,\rho)}(u)| > \sigma\}\right|\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\,\rho^{\frac{0}{p}} = c$$

Em particular para x_0 pertencente à fronteira de $\bar{\Omega}$ e $\rho = d(\Omega)$ temos que para todo $\sigma > 0$

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |u-m_\Omega(u)| > \sigma\}| \leq c^p \quad ,$$

donde $u \in L^p_*(\Omega)$, o que mostra que $\mathcal{L}^{p,0}_*(\Omega) \subset L^p_*(\Omega)$ e fica então demonstrado o lema.

§3. TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO

Neste parágrafo demonstraremos os teoremas de interpolação que envolvem os espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$. Para tanto utilizaremos os teoremas de interpolação de Riesz-Thorin e de Marcinkiewicz - (ver introdução).

No que se segue usaremos a notação $\varepsilon^{\alpha,p}$ para os espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, com $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$. Como a variação de λ é $0 \leq \lambda \leq n+p$ temos que a variação de α é $-\frac{n}{p} \leq \alpha \leq 1$.

Observemos primeiramente que :

1. Se $\alpha = -\frac{n}{p}$, então $\alpha = 0$ e $\varepsilon^{\alpha,p} = L^p$.

2. Se $-\frac{n}{p} < \alpha < 0$, então $0 < \lambda < n$ e $\varepsilon^{\alpha,p} = L^{p,\lambda}$ (espaço de Morrey) .

3. Se $\alpha = 0$, então $\lambda = n$ e $\varepsilon^{\alpha,p} = BMO$

4. Se $0 < \alpha \leq 1$, então $n < \lambda \leq n+p$ e $\varepsilon^{\alpha,p} = Lip_\alpha$

Com a nova notação temos que $u \in \varepsilon^{\alpha,p}$ se existe constante $M > 0$ tal que para todo $x_0 \in \bar{\Omega}$ e todo $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \leq M \rho^{n+\alpha p} ,$$

ou equivalentemente

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \leq M \rho^{n+\alpha p} .$$

A seguir a notação $T : A \to B$ significará que o operador linear T quando restrito a A, resulta uma aplicação contínua de A em B.

<u>Teorema 3.3.1</u>: Seja T um operador linear tal que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha_0, p_0}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_0$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha_1, p_1}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_1 .$$

Então $T : L^q(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha, p}(\Omega)$ com $\|T\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$, sempre que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, $0 < \theta < 1$.

<u>Demonstração</u>: Consideremos inicialmente a aplicação $J_E : \varepsilon^{\alpha, p}(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha, p}(\Omega)$ definida por

$$J_E . u = \begin{cases} u - m_E(u) & \text{em} \quad E \subset \Omega \\ 0 & \text{em} \quad E^c \end{cases}$$

Vamos verificar agora que

(i) J_E é um operador linear. De fato:

$$J_E(u+av) = \begin{cases} u+av-m_E(u+av) & \text{em} \quad E \\ 0 & \text{em} \quad E^c \end{cases}$$

$$= \begin{cases} u-m_E(u)+a(v-m_E v) & \text{em} \quad E \\ 0 & \text{em} \quad E^c \end{cases}$$

$$= \quad J_E \cdot u + a\, J_E \cdot v \quad .$$

(ii) Para cada $E = \Omega(x_0,\rho)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\rho \in (0,d(\Omega)]$, $J_E : \varepsilon^{\alpha,p} \to L^p(\Omega)$ com $\|J_E\| \leq \rho^{\alpha+\frac{n}{p}}$.

Com efeito, da definição de J_E temos que para cada $E = \Omega(x_0,\rho)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\rho \in (0,d(\Omega)]$

$$\|J_E\, u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |J_E \cdot u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_E |J_E\, u|^p dx + \int_{E^c} |J_E\, u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_E |u-m_E(u)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

Multiplicando e subdividindo por $\rho^{\alpha+\frac{n}{p}}$ e tomando o supremo sobre os $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\rho \in (0,d(\Omega)]$ vem que

$$\|J_E\, u\|_{L^p(\Omega)} \leq \rho^{\alpha+\frac{n}{p}} \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \rho^{-(\alpha+\frac{n}{p})} \|u-m_E(u)\|_{L^p(E)}$$

$$= \rho^{\alpha+\frac{n}{p}} \, |||u|||_{\varepsilon^{\alpha,p}} \quad .$$

Portanto $J_E : \varepsilon^{\alpha,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ e $\|J_E\| \leq \rho^{\alpha+\frac{n}{p}}$.

Por hipótese temos que $T : L^{q_0}(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha_0,p_0}(\Omega)$ com $\|T\| \leq M_0$ e como acabamos de ver em (ii) $J_E : \varepsilon^{\alpha_0,p_0}(\Omega) \to L^{p_0}(\Omega)$ com $\|J_E\| \leq \rho^{\alpha_0+\frac{n}{p_0}}$. Então a composta $J_E T$ é uma aplicação tal que

$$J_E T : L^{q_0}(\Omega) \to L^{p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq \|J_E\| \; \|T\| \leq M_0 \; \rho^{\alpha_0+\frac{n}{p_0}} .$$

Analogamente temos que

$$J_E T : L^{q_1}(\Omega) \to L^{p_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq M_1 \; \rho^{\alpha_1+\frac{n}{p_1}} .$$

Assim o operador linear $J_E T$ satisfaz as hipóteses do teorema de Riesz-Thorin. Logo

$$J_E T : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq \left(M_0 \; \rho^{\alpha_0+\frac{n}{p_0}}\right)^{(1-\theta)} \left(M_1 \; \rho^{\alpha_1+\frac{n}{p_1}}\right)^{\theta},$$

sempre que $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < \theta < 1$.

Desta forma,

$$\begin{aligned}
(78) \qquad \|J_E T\| &\leq M_0^{1-\theta} \, M_1^{\theta} \; \rho^{(\alpha_0+\frac{n}{p_0})(1-\theta)} \; \rho^{(\alpha_1+\frac{n}{p_1})\theta} \\
&= M_0^{1-\theta} \, M_1^{\theta} \; \rho^{\alpha_0(1-\theta)+\alpha_1\theta+ n(\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1})} \\
&= M_0^{1-\theta} \, M_1^{\theta} \; \rho^{\alpha+\frac{n}{p}} ,
\end{aligned}$$

com $\alpha = \alpha_0(1-\theta)+\alpha_1\theta$.

Mas $\|J_E T u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J_E T\| \, \|u\|_{L^p(\Omega)}$, e como $\|J_E T u\|_{L^p(\Omega)} = \|J_E T u\|_{L^p(E)}$. Utilizando (78) vem que

$$\|J_E T u\|_{L^p(E)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \rho^{n+\frac{\alpha}{p}} \|u\|_{L^q(\Omega)} .$$

Então para todo $E = \Omega(x_0,\rho)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\rho \in (0,d(\Omega)]$ temos

$$\|Tu-m_E(Tu)\|_{L^p(E)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \rho^{n+\frac{\alpha}{p}} \|u\|_{L^q(\Omega)} ,$$

o que significa que $Tu \in \varepsilon^{\alpha,p}$ e que

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0<\rho\leq d(\Omega)}} \rho^{-(\alpha+\frac{n}{p})} \|Tu - m_E(Tu)\|_{L^p(\Omega(x_0,\rho))} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

ou seja

$$|||Tu|||_{\varepsilon^{\alpha,p}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)} .$$

Portanto $T : L^q(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha,p}(\Omega)$ com $\|T\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ sempre que $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$, $0 < \theta < 1$, o que demonstra o teorema.

<u>Teorema 3.3.2</u>: Seja T um operador linear tal que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \to \mathcal{L}_*^{p_0,\lambda_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0^*$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \to \mathcal{L}_*^{p_1,\lambda_1}(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|T\| \leq M_1^* .$$

Então $\quad T : L^{q}(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha,p}(\Omega) \qquad$ com $\qquad \|T\| \leq c_\theta \, M^{*1-\theta} \, M_1^{*\theta}$,

sempre que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0} + \dfrac{\theta}{q_1}$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$,

$0 < \theta < 1$, onde $\alpha_0 = \dfrac{\lambda_0 - n}{p_0}$ e $\alpha_1 = \dfrac{\lambda_1 - n}{p_1}$.

<u>Demonstração</u>: Consideremos o operador linear J_E do teorema anterior e seja $u \in \mathcal{L}_*^{p,\lambda}(\Omega)$. Então para todo $\sigma > 0$, todo $E = \Omega(x_0,\rho)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $0 < \rho \leq d(\Omega)$ segue que

$$\sigma(|\{x \in E : |u(x) - m_E(u)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_* \, \rho^{\frac{\lambda}{p}} .$$

Pela definição de J_E temos que para todo $\sigma > 0$ e todo $E = \Omega(x_0,\rho)$

$$\{x \in \Omega : |J_E u| > \sigma\} \subset \{x \in E : |u(x) - m_E(u)| > \sigma\} ,$$

donde

$$\sigma(|\{x \in \Omega : |u(x) - m_E(u)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_* \, \rho^{\frac{\lambda}{p}}$$

e portanto $\quad \|J_E u\|_{L_*^p(\Omega)} \leq \rho^{\frac{\lambda}{p}} \|u\|_*$.

Desta maneira, temos que para todo $E = \Omega(x_0,\rho)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$ e $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$J_E : \mathcal{L}_*^{p,\lambda}(\Omega) \to L_*^p(\Omega) \qquad \text{com} \qquad \|J_E\| \leq \rho^{\frac{\lambda}{p}} .$$

Agora como por hipótese temos

$$T : L^{q_0}(\Omega) \to \mathcal{L}_*^{p_0,\lambda_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0^*$$

amos de observar

$$_E : \mathcal{L}_*^{p_0,\lambda_0}(\Omega) \to L_*^{p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E\| \leq \rho^{\frac{\lambda_0}{p_0}}$$

omposição $J_E T$ é tal que

$$' : L^{q_0}(\Omega) \to L_*^{p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq M_0^* \rho^{\frac{\lambda_0}{p_0}} .$$

De maneira análoga vemos que

$$_E T : L^{q_1}(\Omega) \to L_*^{p_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq M_1 .$$

Assim o operador linear $J_E T$ satisfaz as hipóteses do interpolação de Marcinkiewicz e então

$$J_E T : L^q(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

$$| \leq c_\theta {M_\theta^*}^{1-\theta} {M_1^*}^{\theta} \rho^{\frac{\lambda_0}{p_0}(1-\theta) + \frac{\lambda_1}{p_1}\theta} , \qquad \text{sempre} \qquad \text{que}$$

$$\frac{\theta}{q_1} , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad e \quad 0 < \theta < 1 .$$

Mas como $\|J_E Tu\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J_E T\| \; \|u\|_{L^q(\Omega)}$, de (78)

$$\|J_E\,T\,u\|_{L^p(\Omega)} \le c_\theta\, M_\theta^{*^{1-\theta}}\, M_1^{*^{\theta}}\, \rho^{\frac{\lambda_0}{p_0}(1-\theta)+\frac{1}{p_1}\theta}\, \|u\|_{L^q(\Omega)},$$

e pela definição do operador J_E decorre que

$$\|Tu-m_E(Tu)\|_{L^p(E)} \le c_\theta\, M_0^{*^{1-\theta}}\, M_1^{*^{\theta}}\, \rho^{\frac{\lambda_0}{p_0}(1-\theta)+\frac{\lambda_1}{p_1}\theta}\, \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

$$= c_\theta\, M_0^{*^{1-\theta}}\, M_1^{*^{\theta}}\, \rho^{\alpha_0(1-\theta)+\alpha_1\theta+n\left(\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}\right)}\|u\|_{L^q(\Omega)}$$

$$= c_\theta\, M_0^{*^{1-\theta}}\, M_1^{*^{\theta}}\, \rho^{\alpha+\frac{n}{p}}\, \|u\|_{L^q(\Omega)} \qquad ,$$

onde $\alpha_0 = \dfrac{\lambda_0-n}{p_0}$, $\alpha_1 = \dfrac{\lambda_1-n}{p_1}$ e $\alpha = (1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$. Isto nos mostra que $T\,u \in \varepsilon^{\alpha,p}$ e que

$$\sup_{\substack{x_0\in\bar\Omega\\ 0<\rho\le d(\Omega)}} \rho^{-(n+\frac{\alpha}{p})}\,\|Tu-m_E(Tu)\|_{L^p(E)} \le c_\theta\, M_0^{*^{1-\theta}}\, M_1^{*^{\theta}}\, \|u\|_{L^q(\Omega)} ,$$

isto é, $|||Tu|||_{\varepsilon^{\alpha,p}} \le c_\theta\, M_0^{*^{1-\theta}}\, M_1^{*^{\theta}}\, \|u\|_{L^q(\Omega)}$.

Logo $T : L^q(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha,p}(\Omega)$ com $\|T\| \le c_\theta\, M_0^{*^{1-\theta}}\, M_1^{*^{\theta}}$, sempre que $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\theta}{q_0}+\dfrac{\theta}{q_1}$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$, $\alpha < \theta < 1$ e $\alpha = (1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$ onde $\alpha_0 = \dfrac{\lambda_0-n}{p_0}$, $\alpha_1 = \dfrac{\lambda_1-n}{p_1}$, o que demonstra o teorema.

§4. APLICAÇÃO: POTENCIAL DE RIESZ

Daremos a seguir uma aplicação dos teoremas de interpolação envolvendo os espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, onde o operador linear considerado é o Potencial de Riesz, definido por

$$\mathbb{P}_\delta f(x) = \int_\Omega \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\delta}}\, dy \qquad (0 < \delta < n, \quad \Omega = \mathbb{R}^n)$$

Nesta aplicação usaremos resultados de integração fracionária que não demonstraremos aqui, e que podem ser "encontrados" em [17] e [18]. Do teorema 1, página 119 de [17] segue que

$$\mathbb{P}_\delta : L^1(\Omega) \to L^{p_0}(\Omega) \qquad (\frac{n}{p_0} = n-\delta)$$

Mas $L^{p_0}(\Omega)$ está continuamente imerso em $L_*^{p_0}(\Omega)$, donde

(79) $$\mathbb{P}_\delta : L^1(\Omega) \to L_*^{p_0}(\Omega) \qquad (\frac{n}{p_0} = n-\delta) \quad .$$

Agora, do teorema (9.1), página 138 de [18] vem que

(80) $$\mathbb{P}_\delta : L^{q_1}(\Omega) \to \mathrm{Lip}(1) \qquad (\delta = 1 + \frac{n}{p_1})$$

Entretanto $L_*^{p_0}(\Omega) = \mathcal{L}^{p_0,0}(\Omega)$ e $\mathcal{L}^{p_1,\lambda_1} = \mathrm{Lip}(1)$ com $1 = \frac{\lambda_1 - n}{p_1}$. Além disso $\mathcal{L}^{p_1,\lambda_1}(\Omega)$ está continuamente imerso em $\mathcal{L}_*^{p_1,\lambda_1}(\Omega)$. Então de (79) e (80) temos que

$$\mathbb{P}_\delta : L^1(\Omega) \to \mathcal{L}_*^{p_0,0}(\Omega) \qquad (\frac{n}{p_0} = n-\delta)$$

e

$$\mathbb{P}_\delta : L^{q_1}(\Omega) \to \mathcal{L}_*^{p_1,\lambda_1}(\Omega) \qquad (\delta = 1+\frac{n}{q_1})$$

Estamos deste modo nas hipóteses do teorema 3. donde se conclui que

$$\mathbb{P}_\delta : L^q(\Omega) \to \varepsilon^{\alpha,p}(\Omega)$$

sempre que $\frac{1}{q} = (1-\theta) + \frac{\theta}{q_1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $0 < \theta < 1$ e e $\alpha = (1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$. Mas como $\alpha_0 = \frac{\lambda_0-n}{p_0} = -\frac{n}{p_0} = \delta-n$ e $\alpha_1 = \frac{\lambda_1-n}{p_1} = 1 = \delta-\frac{n}{q_1}$, segue que

$$\begin{aligned}\alpha &= (\delta-n)(1-\theta) + (\delta+\frac{n}{q_1})\theta \\ &= \delta - \theta\delta - n(1-\theta) + \delta\theta - \frac{n}{q_1}\theta \\ &= \delta - n(\ (1-\theta) + \frac{\theta}{q_1}\ ) \ = \ \delta - \frac{n}{q} \ .\end{aligned}$$

Agora

$$\varepsilon^{\alpha,p} = \begin{cases} \mathrm{Lip}(\alpha), & \alpha = \delta - \frac{n}{q} \quad \text{se} \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \mathrm{BMO} & \text{se} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Mas se $\alpha = 0$ temos $\delta = \frac{n}{q}$ e se $0 < \alpha \leq 1$ teremos $\delta-1 \leq \frac{n}{q} < \delta$. Logo

$$\varepsilon^{\alpha,p} = \begin{cases} \text{Lip}(\alpha), & \alpha = \delta - \frac{n}{q} \quad \text{se} \quad \delta - 1 \leq \frac{n}{q} < \delta \\ \text{BMO} & \text{se} \quad \delta = \frac{n}{q} \end{cases}$$

Portanto

$$\mathbb{P}_\delta : L^q(\Omega) \to \text{Lip}(\alpha), \qquad \alpha = \delta - \frac{n}{q} \quad \text{se} \quad \delta - 1 \leq \frac{n}{q} < \delta$$

e

$$\mathbb{P}_\delta : L^q(\Omega) \to \text{BMO} \qquad \text{se} \quad \delta = \frac{n}{q} \ .$$

Observação 4: O primeiro destes dois resultados segue diretamente do teorema (9.1) de [18], entretanto o segundo é um novo complemento do primeiro que talvez não seja tão simples sem o auxílio dos espaços $\mathcal{L}^{p,\lambda}$.

REFERÊNCIAS

[1] BAROZZI, G.: *Una generalizzazione degli spazi di Morrey*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), pp. 609-626.

[2] BERGH, J. and LÖFSTRÖM, J.: *Interpolation Spaces, an introduction*, Springer-Verlag, 1976.

[3] CAMPANATO, S.: *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XVII (1963), pp. 175-188.

[4] CAMPANATO, S.: *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XVIII (1964), pp. 137-159.

[5] COTLAR, M. and CIGNOLI, R.: *An introduction to Functional Analysis*, North-Holland / American Elsevier, 1974.

[6] DA PRATO, G.: *Spazi* $\mathcal{L}^{p,\phi}(\Omega,\delta)$ *e loro proprietà*, Ann. Mat. Pura Appl., 69 (1965), pp. 383-392.

[7] HEWITT, E. and STROMBERG, K.: *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[8] JOHN, F. and NIRENBERG, L.: *On Functions of Bounded Mean Oscillation*, Comm. Pure and Applied Math., Vol. XIV (1961), pp. 415-426.

[9] LARSEN, R.: *Functional Analysis, an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[10] NERI, U.: *Some properties of functions with Bounded Mean Oscillation*, Studia Math. 61 (1977), pp. 63-75.

[11] ORTIZ, A.: *Espacios de oscilacion media acotada,* IV Escuela Latinoamericana de Matematica, Peru, 1978.

[12] PEETRE, J.: *On the theory of* $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ *Spaces,* Journal of Functional Analysis, (1969), pp. 71-87.

[13] SPANNE, S.: *Sur l'interpolation entre les espaces* $\mathcal{L}_k^{p,\phi}$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966), pp. 625-648.

[14] SPANNE, S.: *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa , 19 (1965), pp. 593-608.

[15] STAMPACCHIA, G.: $\mathcal{L}^{p,\lambda}$*-spaces and interpolation,* Comm. Pure Appl. Math., 12 (1964), pp. 293-306.

[16] STAMPACCHIA, G.: *The spaces* $\mathcal{L}^{p,\lambda}$, $N^{p,\lambda}$ *and interpolation,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), pp. 443-462.

[17] STEIN, E.M.: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton Univ. Press, Princeton , 1970.

[18] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series,* Cambridge Univ. Press , New York, 1968.